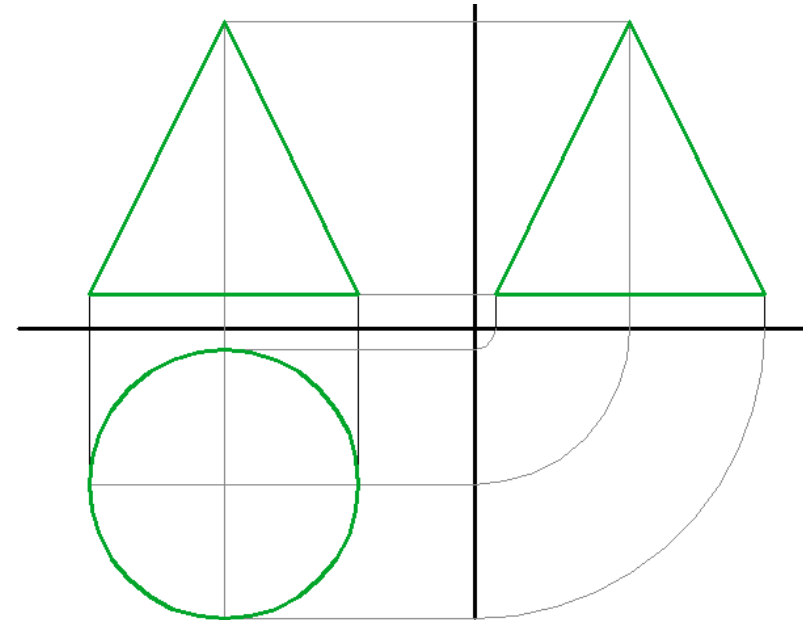
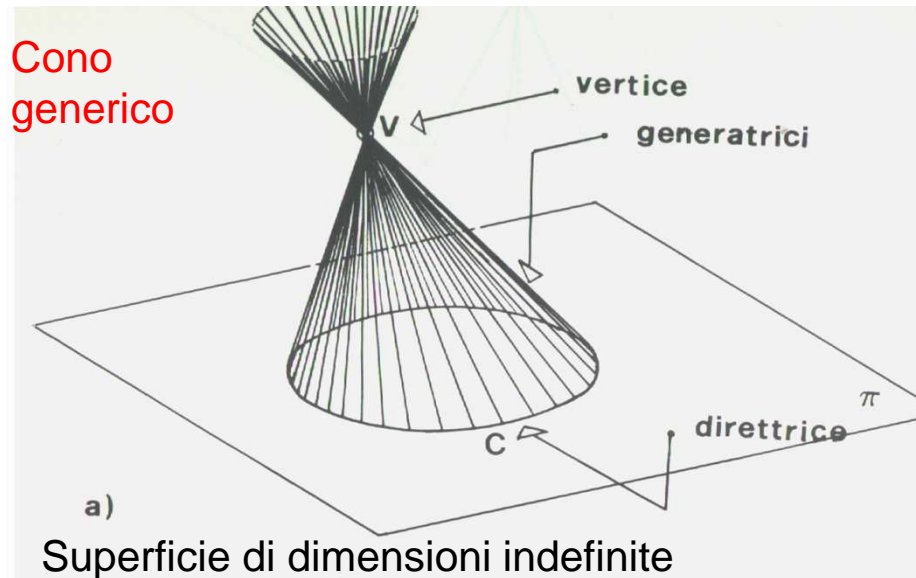


## P.O. di un Cono e relative sezioni piane

Il cono è una superficie generata da una retta (*generatrice*) che si muove con continuità appoggiandosi ad una curva piana (*direttrice*) e ad un punto (*vertice*) non appartenente al piano della direttrice.



Le forme del cono dipendono dalla forma e dalla disposizione della curva direttrice: se è un cerchio il cono si dirà circolare; se ellittica sarà un cono ellittico.

Se la congiungente il vertice ed il centro della curva direttrice è perpendicolare al piano che la contiene il cono si dice retto, in caso contrario sarà obliquo

# LE SEZIONI CONICHE

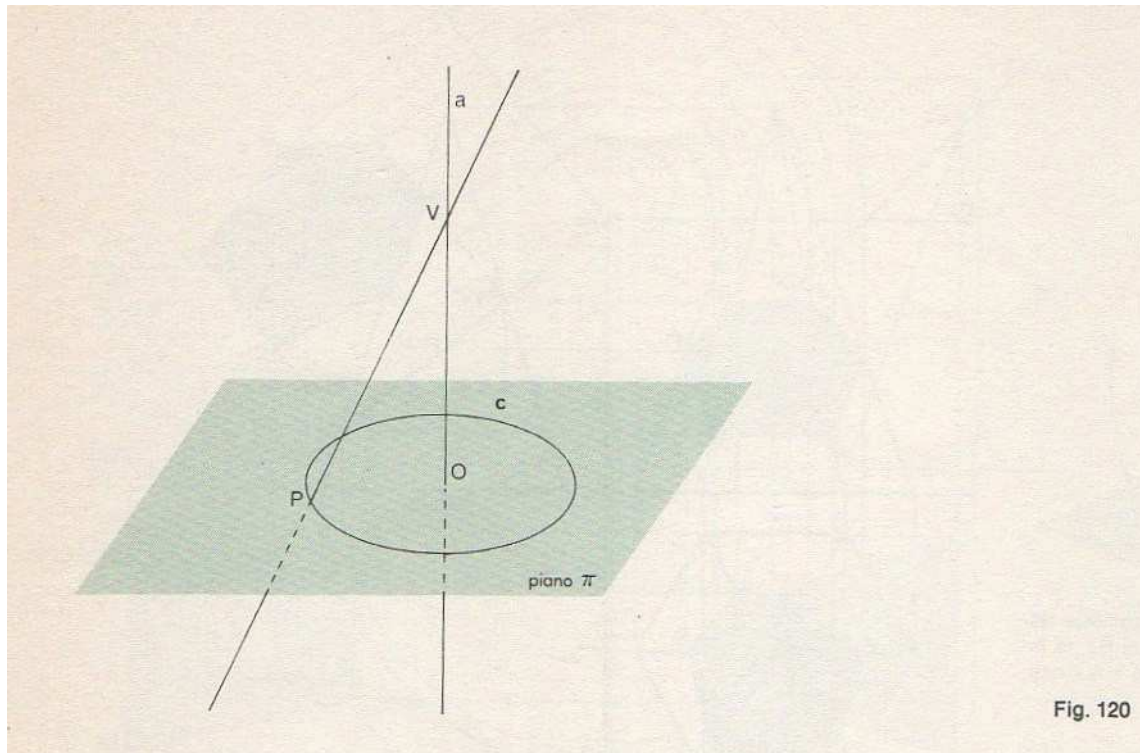


Fig. 120

Di particolare interesse, fra le figure geometriche, sono le **sezioni coniche** che si ottengono tagliando con un piano, non passante per il vertice, una superficie conica indefinita che ora illustriamo.

Sia  $c$  una circonferenza disegnata su un piano  $\pi$ ; innalziamo, per il suo centro  $O$ , la perpendicolare  $a$  al piano  $\pi$ . Consideriamo ora un punto  $V$ , diverso da  $O$ , appartenente ad  $a$  e un qualsiasi punto  $P$ , appartenente a  $c$ : sia  $VP$  la retta passante per  $V$  e per  $P$ . Se immaginiamo che il punto  $P$  descriva la circonferenza  $c$ , allo stesso modo, la retta  $VP$  descriverà una superficie: tale superficie si chiama **superficie conica a due falde** (fig. 120).

Ogni retta, come  $VP$ , di tale superficie si chiama **generatrice**, la retta  $a$  si chiama **asse** della superficie conica e il punto  $V$  il suo **vertice** (fig. 121).



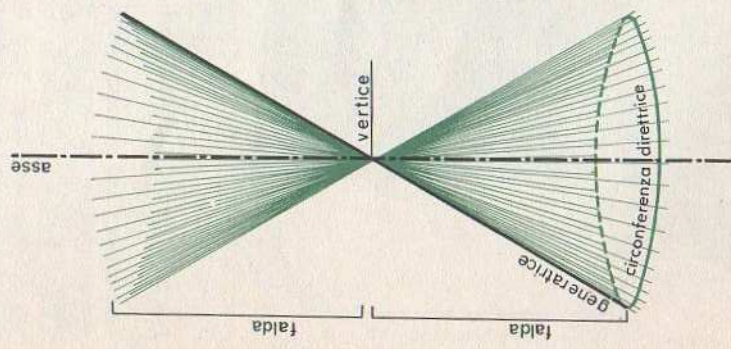


Fig. 121 / Superficie circolare conica a due falde.

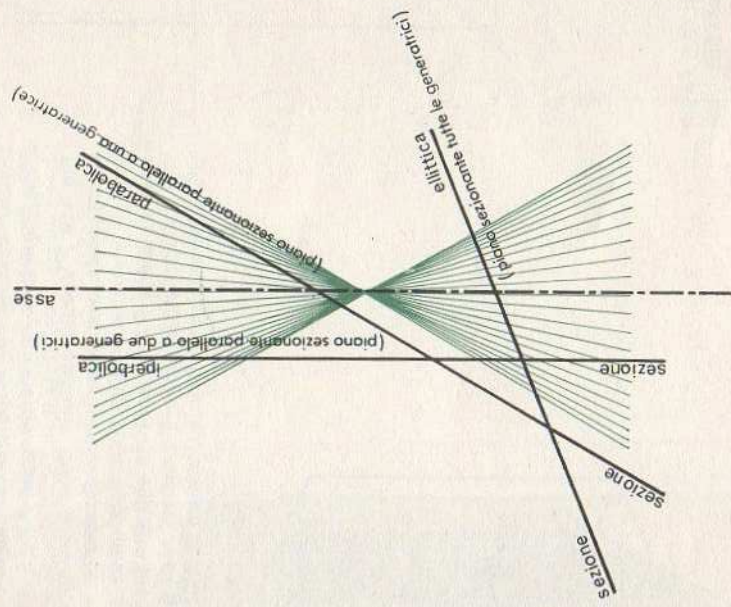


Fig. 122 / Sezioni derivanti da una superficie circolare conica.

Sia ora  $\alpha$  un piano, non passante per V, che taglia la suddetta superficie. A seconda della posizione del piano  $\alpha$  rispetto all'asse  $a$  e alle generatrici della superficie conica, si possono presentare i seguenti casi:

- 1) **il piano  $\alpha$  interseca l'asse  $a$  e tutte le generatrici**: la sezione è una linea chiusa detta **ellisse**; in particolare una circonferenza se il piano  $\alpha$  è perpendicolare all'asse  $a$  (fig. 122);
- 2) **il piano  $\alpha$  è parallelo ad una generatrice (e interseca l'asse)**: la sezione è una linea curva illimitata e aperta detta **parabola** (fig. 122);
- 3) **il piano  $\alpha$  è parallelo all'asse  $a$  (e taglia tutte le generatrici)**: la sezione è una linea curva illimitata, aperta e formata da due rami distinti, che dicesi **iperbole** (fig. 122).

Nelle pagine seguenti, per semplificare, viene esaminato il comportamento di una sola falda della superficie conica, anche quando il piano di sezione le investe entrambe; è evidente che in questo caso la seconda falda si comporta in maniera uguale e contraria alla prima.

Per trovare le sezioni coniche si deve tener presente che il piano  $\alpha$ , sezionante, incontra una superficie curva e quindi produrrà una sezione curva. Per trovare l'andamento di tale curva è necessario fissare il maggior numero possibile di punti attraverso i quali passa la curva stessa.

Non essendoci spigoli di riferimento per trovare le sezioni coniche si usano generalmente due sistemi:

- 1) **SISTEMA DELLE SUCCESSIVE SEZIONI PARALLELE AL P.O.** (fig. 123);
- 2) **SISTEMA DEI PUNTI SULLE GENERATRICI** (fig. 124).

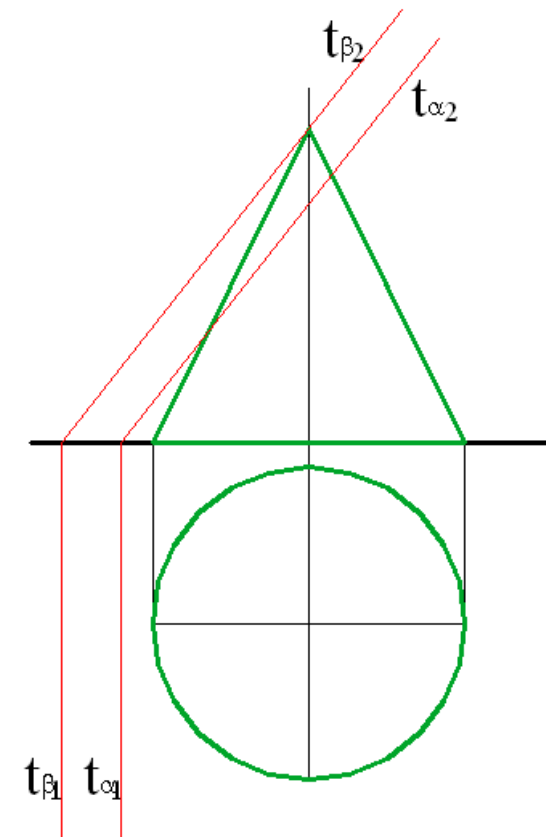
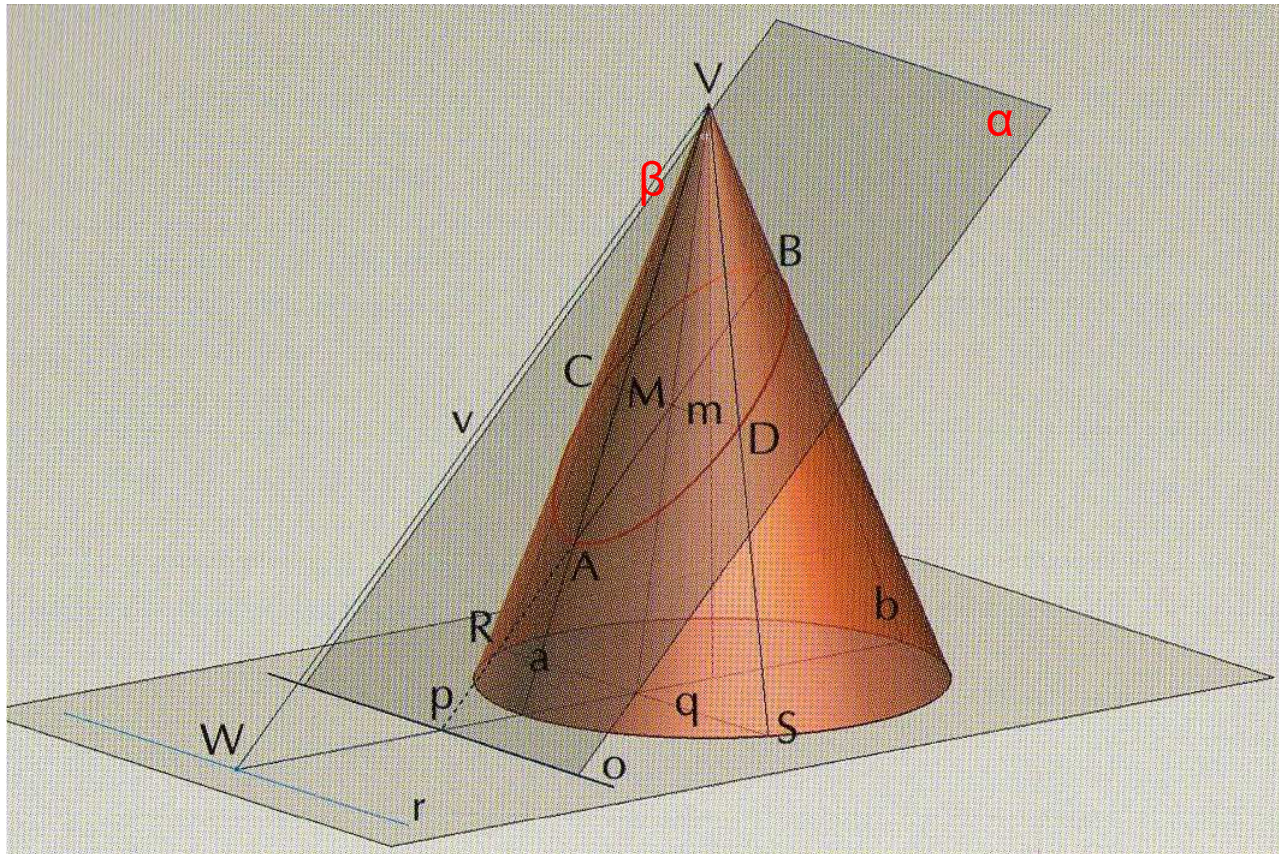
Il cilindro può essere considerato un caso particolare del cono, perché si può pensare come una superficie conica il cui vertice è un **punto improprio** (un punto cioè a distanza infinita). Infatti sezionando una superficie cilindrica con un piano incidente tutte le generatrici e non perpendicolare all'asse si avrà come risultato una **sezione ellittica** (fig. 127).



La sezione di una superficie conica con un piano genera una curva.  
In relazione all'inclinazione  $g$  del piano secante  $\alpha$  rispetto all'asse di rotazione si ottengono le curve denominate ellisse, parabola, iperbole

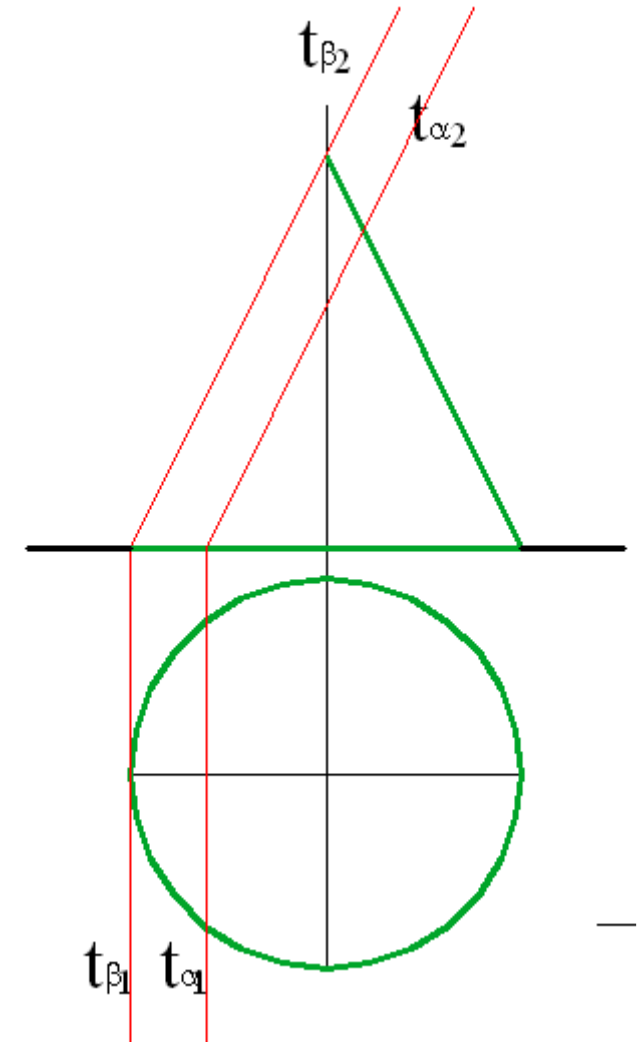
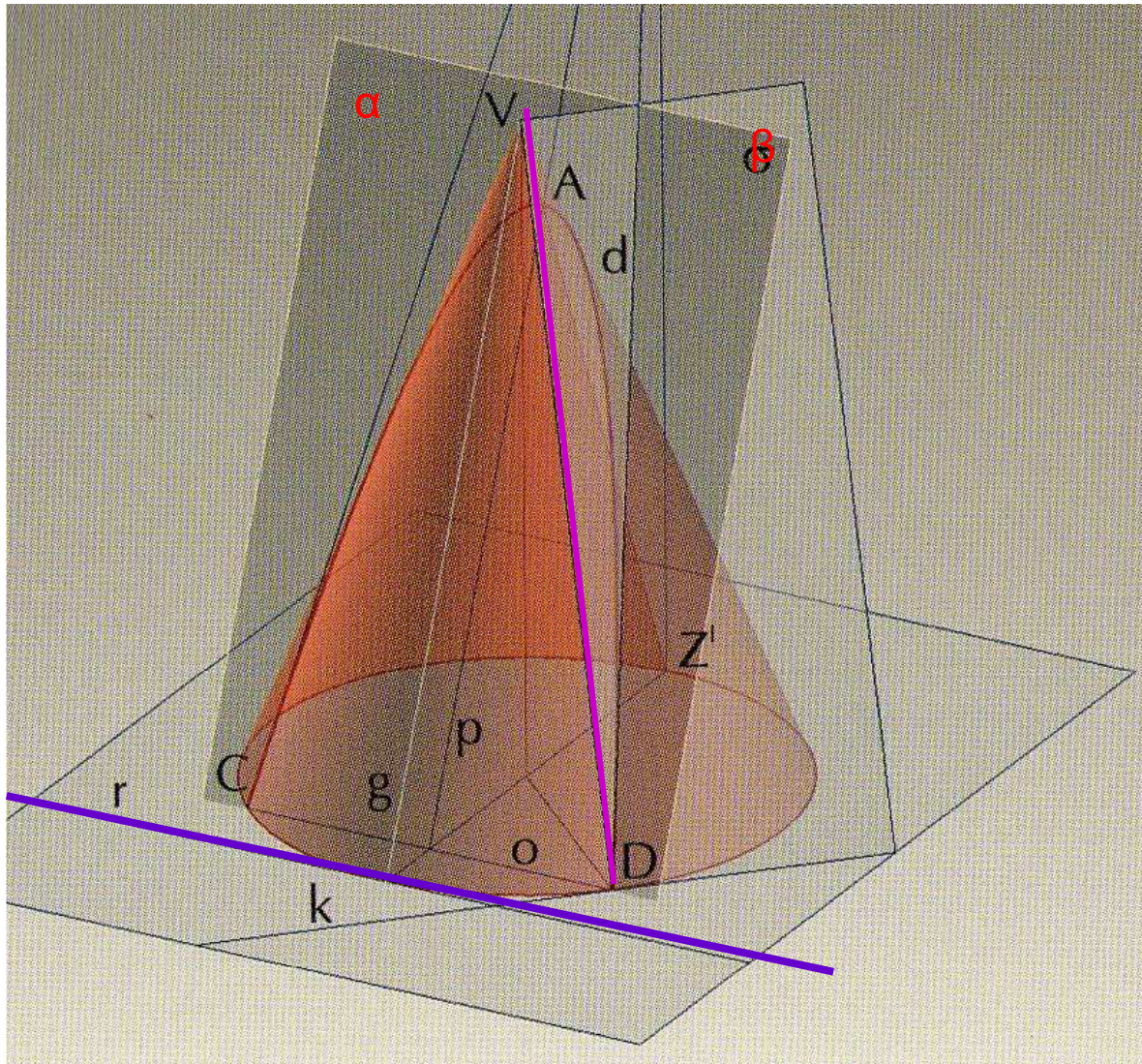
Per stabilire il risultato della sezione si costruisce un piano  $\beta$  appartenente al vertice del cono, parallelo al piano di sezione  $\alpha$  e la sua retta d'intersezione  $r$  con il piano della direttrice circolare. Possono allora darsi i tre casi principali:

**- $r$  è esterna alla direttrice**:  $\alpha$  incontra tutte le generatrici del cono e produce un'**ellisse** (curva costituita da tutti i punti propri)



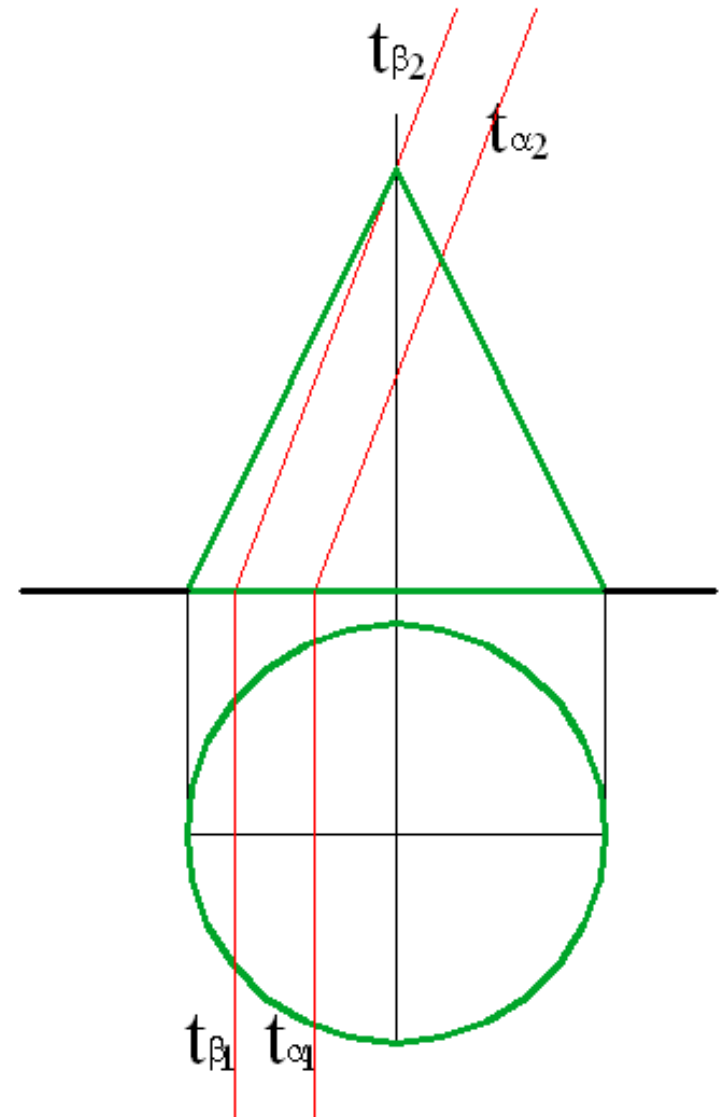
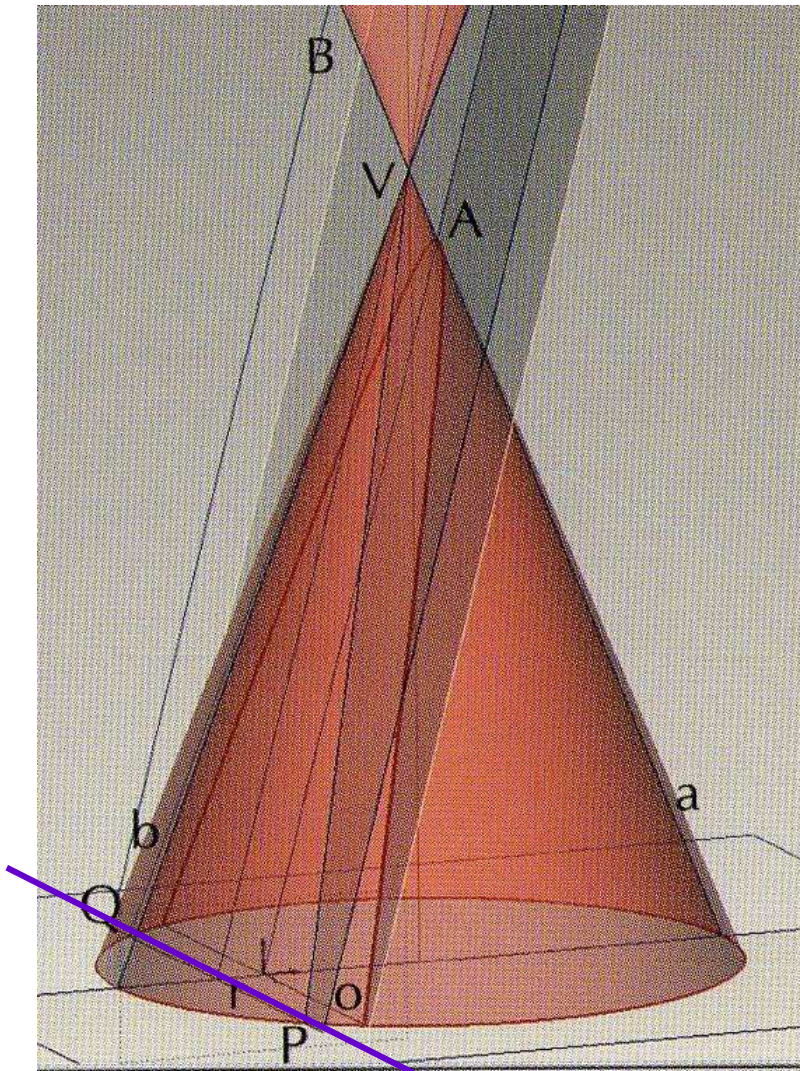


-  **$r$  è tangente alla direttrice**: il piano di sezione è parallelo ad una generatrice del cono (quella che appartiene al piano  $\beta$ ) la curva sezione contiene una direzione, quella della generatrice del cono ed è una **parabola**

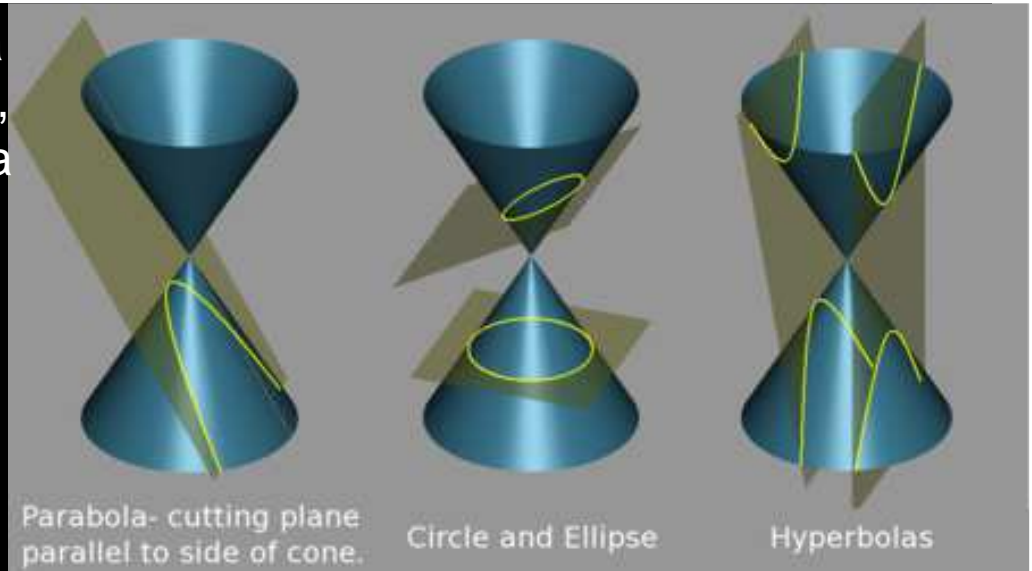
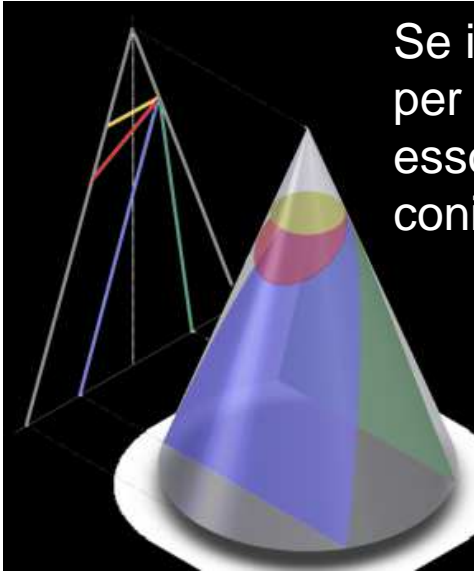




**$r$  è secante la direttrice:** il piano  $\alpha$  è parallelo a due generatrici del cono appartenenti al piano  $\beta$  che risulta secante la superficie, la curva sezione contiene due direzioni ed è **un'iperbole**.

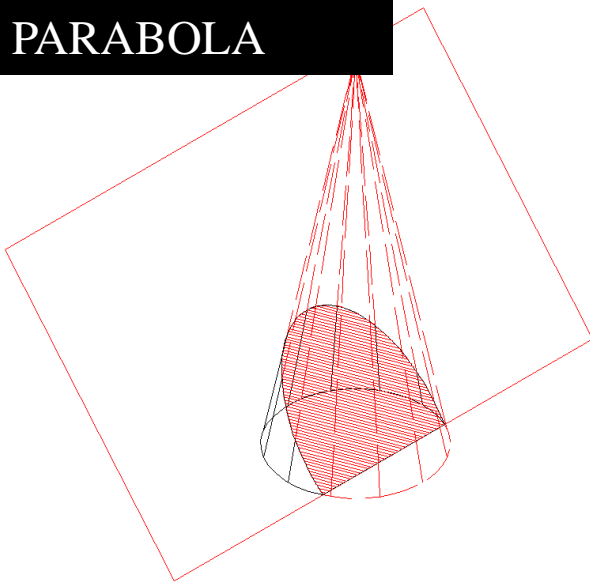


Se il piano  $\pi$  non passa per il vertice  $V$  del cono, esso taglia sul cono una conica non degenera

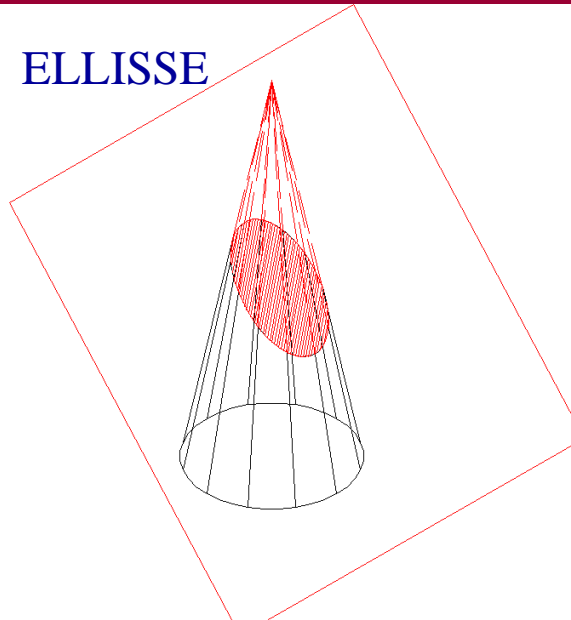


## Sezioni del cono con diversi piani

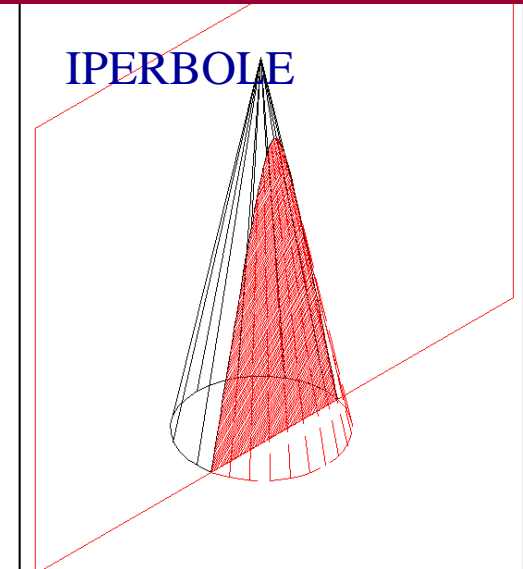
### PARABOLA



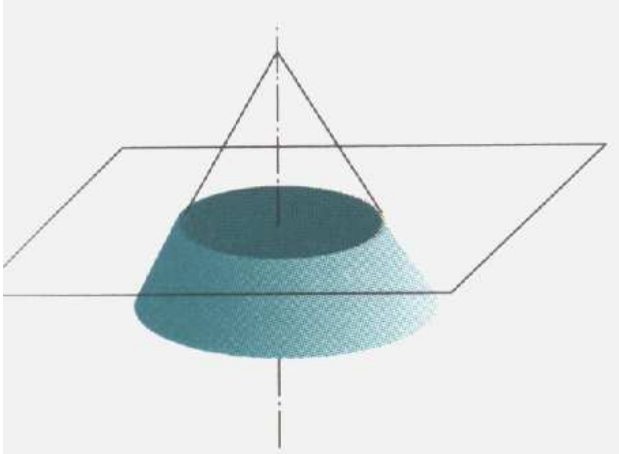
### ELLISSE



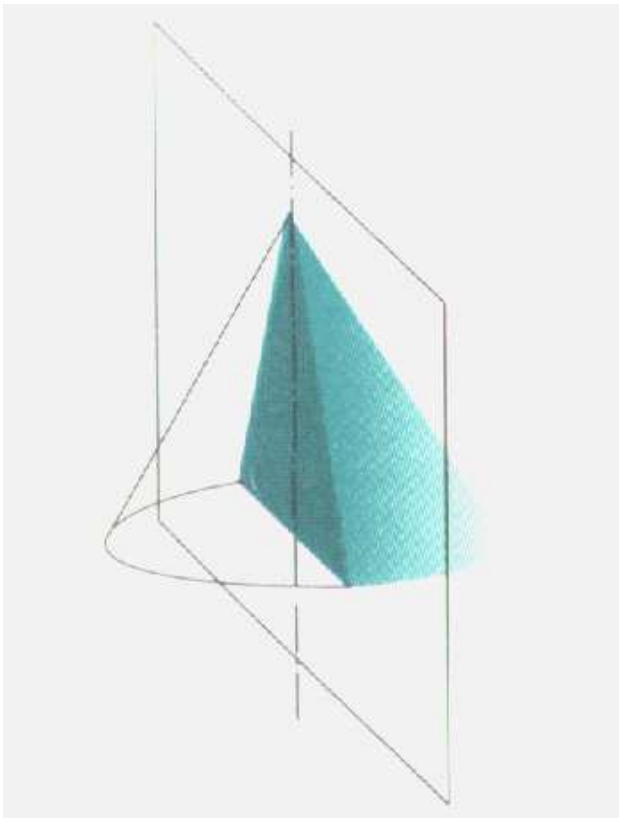
### IPERBOLE



Ci sono tre tipi di coniche non degeneri: le *ellissi*, che sono curve chiuse (nel senso che percorrendole si torna al punto di partenza), le *parabole* che sono curve non chiuse costituite da un solo arco, le *iperboli* che sono curve non chiuse costituite da due archi disgiunti



- Se il piano a è perpendicolare all'asse la sezione è un **cerchio**



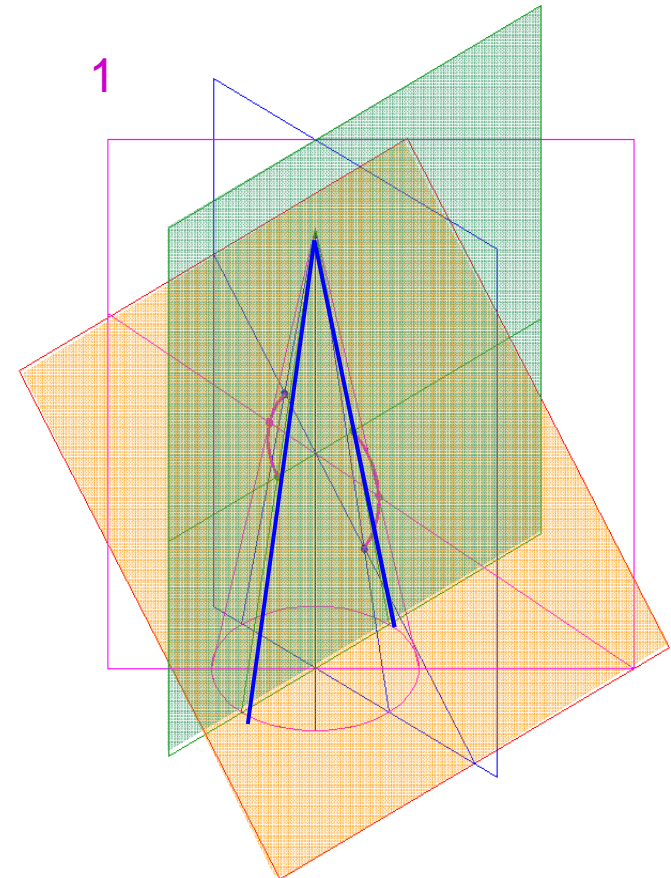
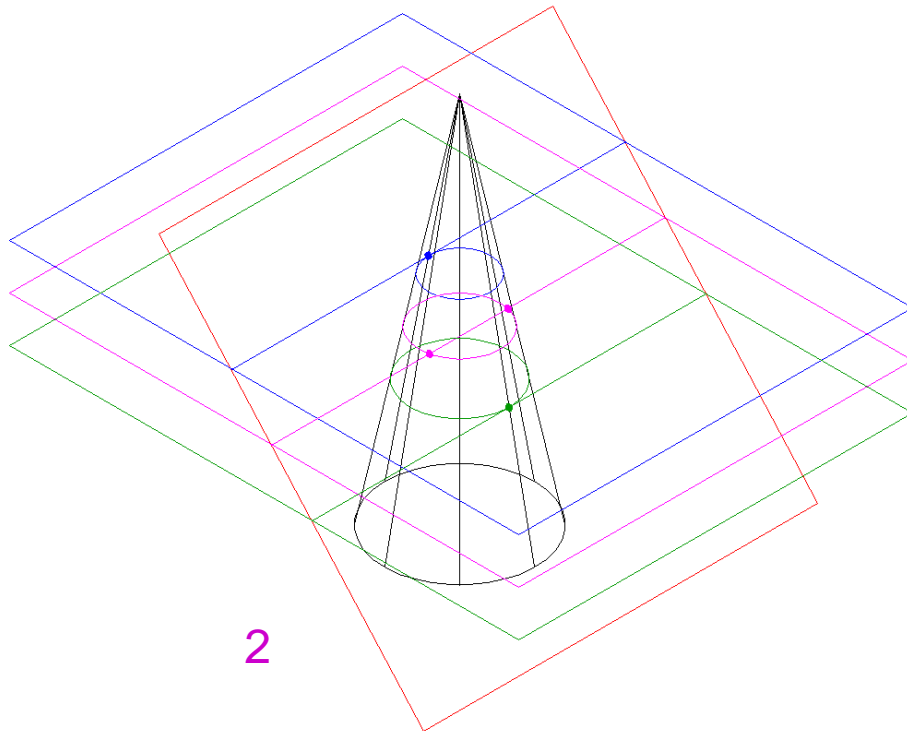
- se il piano a è passante per il vertice la sezione che si ottiene è un **triangolo isoscele**

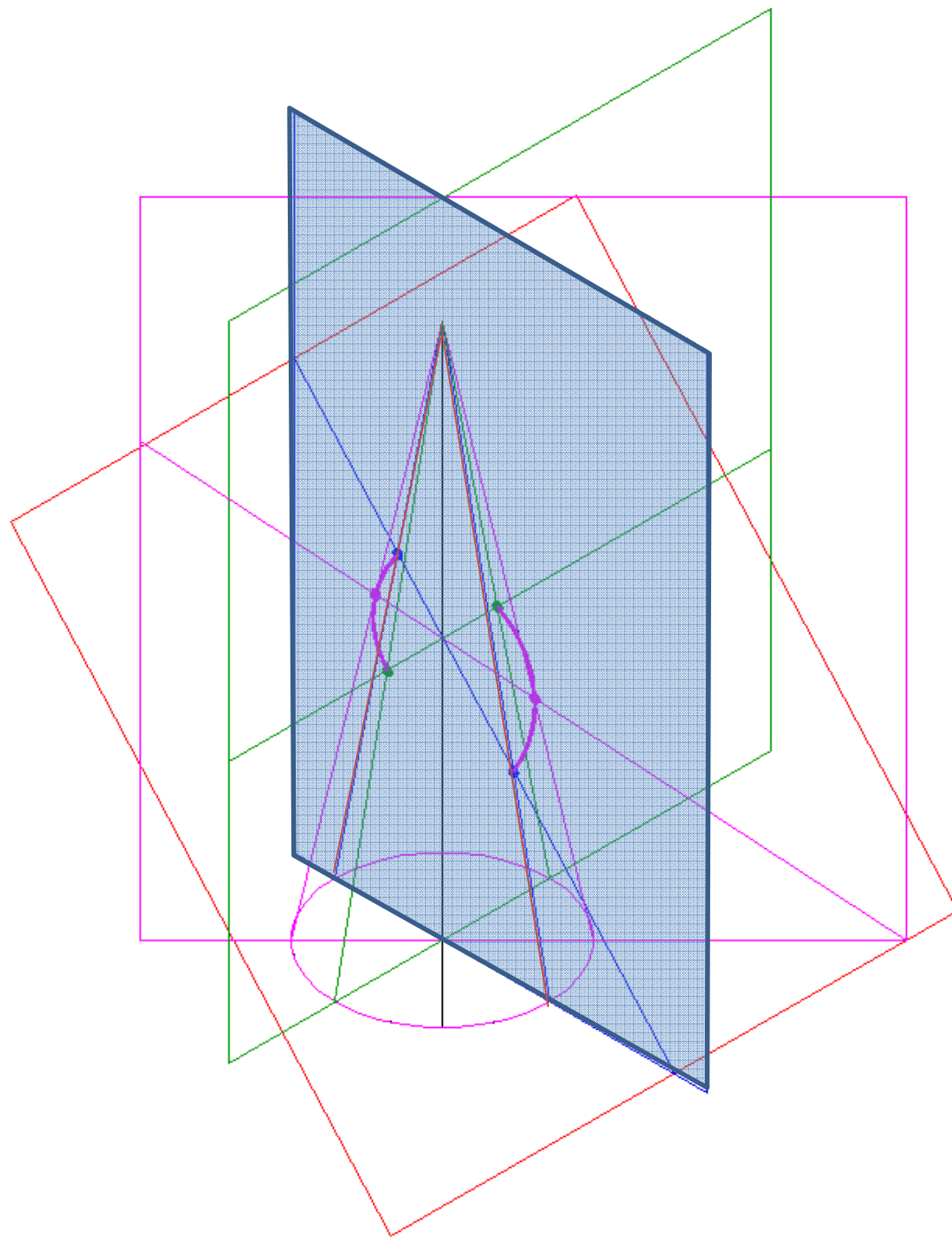


- Per costruire geometricamente la sezione ottenuta dall'intersezione con un piano genericamente inclinato si procede utilizzando due possibili metodi.....

1. Metodo delle generatrici

2. Metodo dei piani paralleli



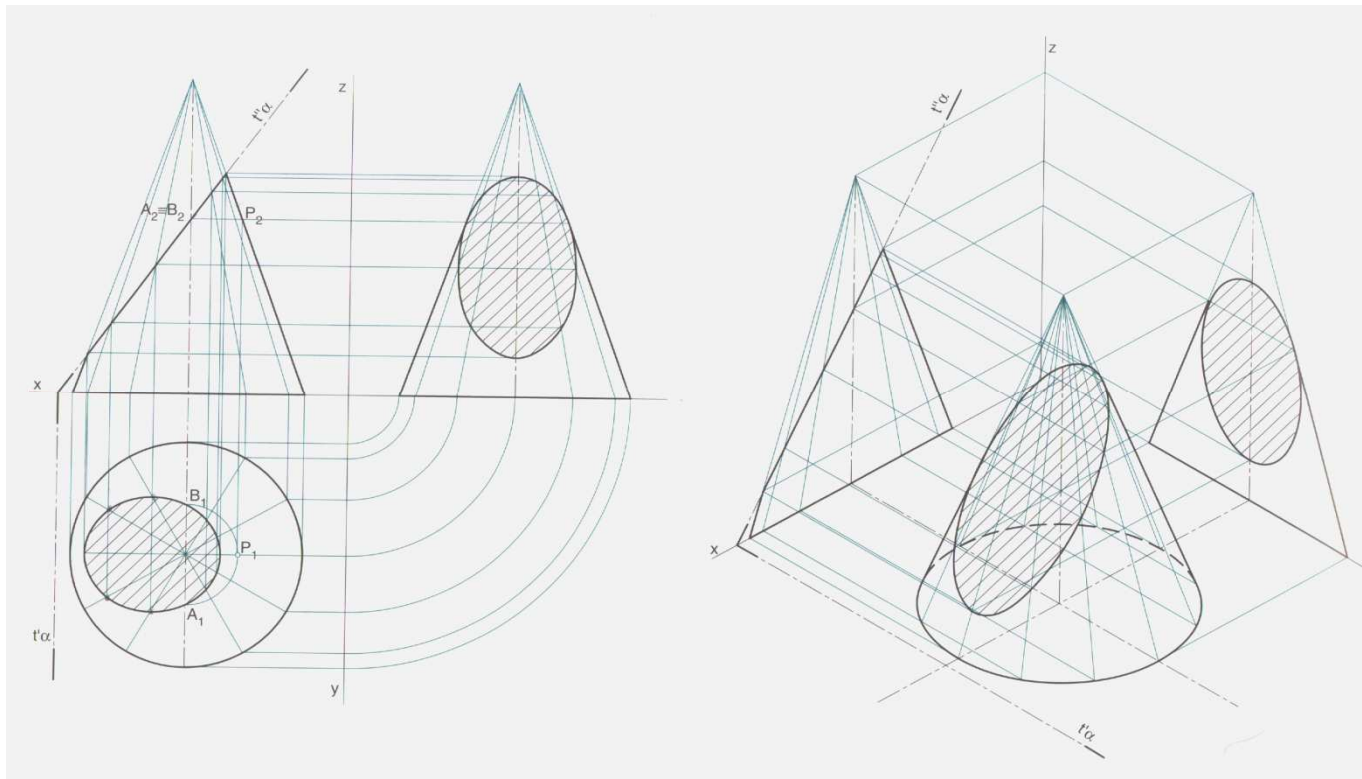


Determinazione della  
curva di intersezione  
mediante l'uso di piani  
ausiliari verticali  
passanti per le  
generatrici.



# METODO DELLE GENERATRICI

Si disegnano le viste del cono in proiezione ortogonale e le tracce del piano secante



Esempio: un piano  $\alpha$  genericamente inclinato

Nella vista dall'alto si individuano i punti della base del cono dai quali condurre le **generatrici**. Disegnate le generatrici nelle tre viste si individuano i punti di intersezione della  $t''\alpha$  con le diverse generatrici. Le linee di riporto condotte da questi punti intersecano le corrispondenti generatrici nelle altre viste. I punti d'intersezione così ottenuti definiscono il profilo della sezione che in questo caso è **un'ellisse**. Si può notare che i punti A e B sono individuabili solo costruendo la semicirconferenza passante per P concentrica alla base. Questi due punti sono individuabili sull'asse verticale.

# SEZIONE DEL CONO: ELLISSE METODO DELLE GENERATRICI

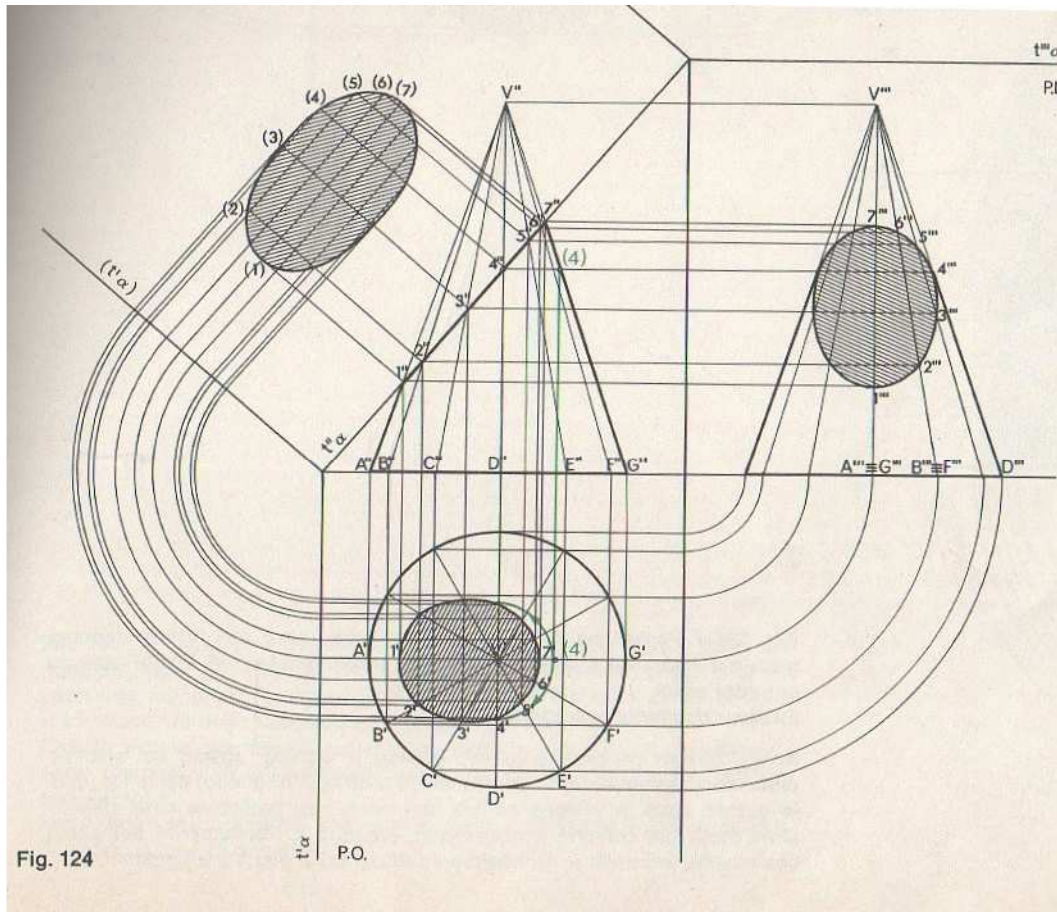


Fig. 124

Fig. 124 / Proiezione ortogonale di un cono retto, con la base appoggiata sul P.O., sezionato dal piano  $\alpha$  perpendicolare al P.V. e obliquo agli altri piani.

Sezione risultante: ellisse.

## SISTEMA DEI PUNTI SULLE GENERATRICI

Una superficie conica si può pensare come una figura costituita da una successione di rette generatrici. Considerando alcune generatrici come se fossero degli spigoli, per determinare la sezione conica sarà sufficiente trovare il loro punto d'incontro con il piano  $\alpha$ , sezionante.

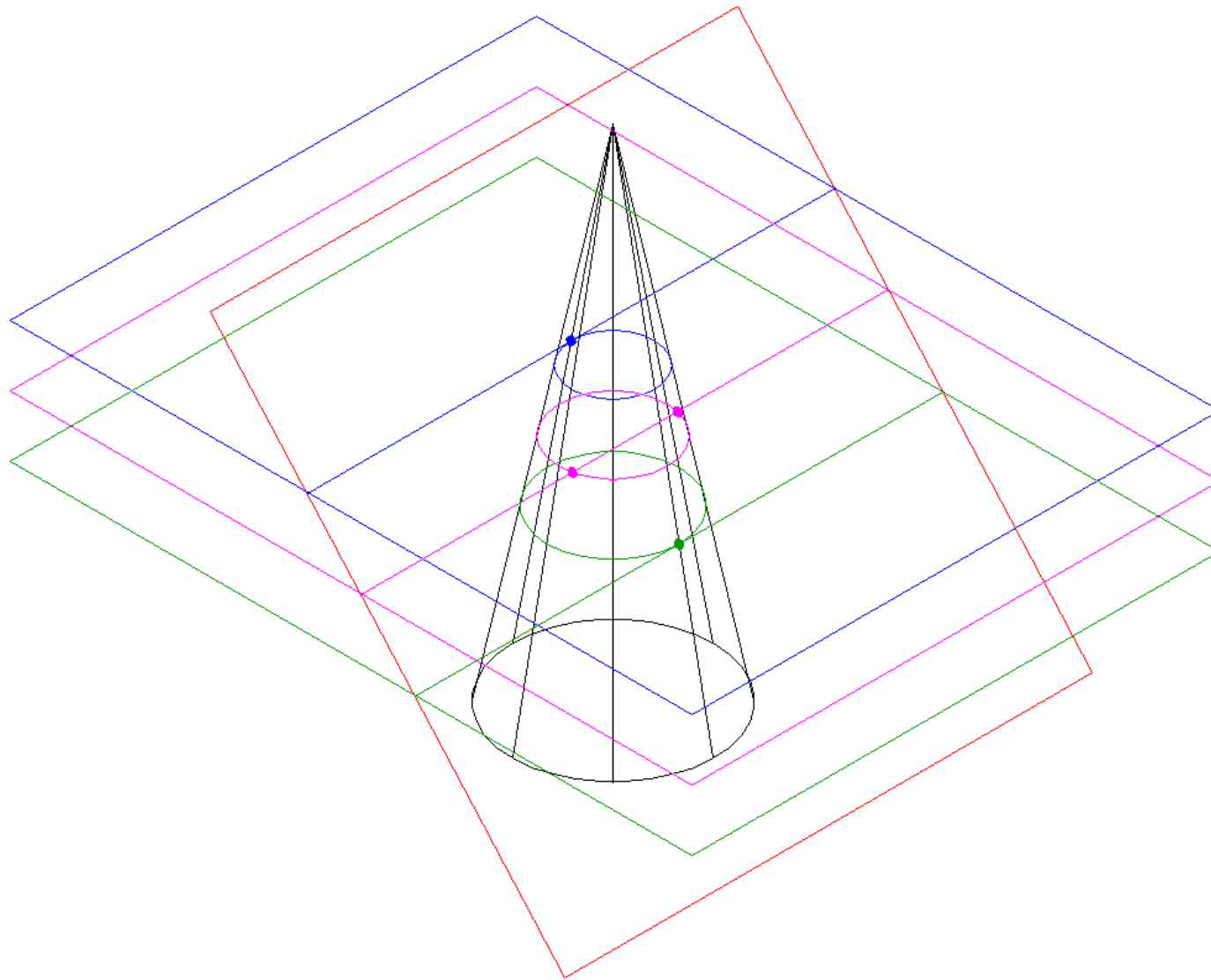
Il procedimento descrittivo è il seguente:

- 1) Sul P.O. si fissa, arbitrariamente, la proiezione di alcune generatrici ( $A''V''$ ,  $B''V''$ ,  $C''V''$ ,  $D''V''$ , ecc.).
- 2) Si proiettano tali generatrici sul P.V. in  $A''V'''$ ,  $B''V'''$ ,  $C''V'''$ ,  $D''V'''$  ecc.
- 3) Si nota che nel P.V. le generatrici fissate incontrano il piano  $\alpha$ , sezionante, nei punti  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ ,  $4''$  ecc. Si riportano questi punti sulla relativa proiezione della generatrice sul P.O. in  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ,  $4'$  ecc.
- 4) Il punto  $4''$  giace su una generatrice la cui proiezione coincide con l'asse del cono. Per trovare la proiezione sul P.O. del punto  $4'$ , è necessario ruotare tale punto sulla generatrice  $V''G''$ , parallela al P.V., proiettarlo sul P.O. e riportarlo con il compasso sulla relativa generatrice ( $D''V''$ ). Tale operazione è indicata in colore.

Trovati tutti i punti sarà sufficiente unirli fra loro per costruire la prima proiezione dell'ellisse sezione.

Per determinare le dimensioni reali della sezione si segue il procedimento indicato a pag. 76 e seguenti.

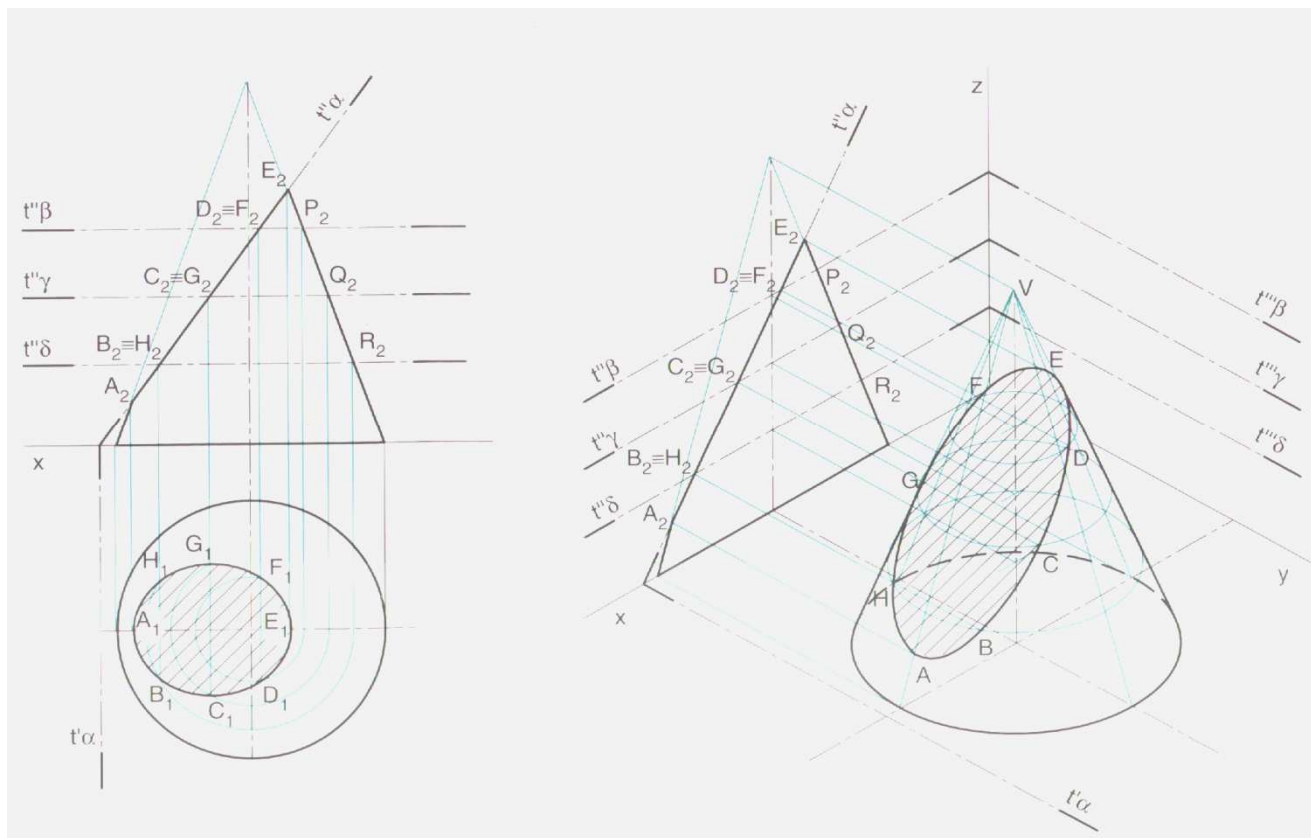




Determinazione della curva di intersezione mediante l'uso di  
piani ausiliari passanti per le direttrici.

## METODO DEI PIANI PARALLELI

Esempio: un piano inclinato  $\alpha$   
La sezione sarà una **ellisse**



Il segmento AE staccato sulla  $t'\alpha$  dai profili del cono fornisce la vista anteriore della sezione (un'ellisse).

Nel tratto del segmento AE si disegnano dei piani orizzontali rappresentati mediante le loro tracce  $t''\beta, t''\gamma, t''\delta$ .

Questi piani tagliando la superficie conica formano delle circonferenze, i cui raggi sono dati dalle distanze dell'asse del cono dai punti  $R_2, Q_2, P_2$ . Riportando questi punti nella vista dall'alto si possono disegnare le circonferenze stesse concentriche con la base del cono. Esse intersecano nei punti  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1$ , le verticali condotte dalle intersezioni di  $t''\alpha$  con i tre piani paralleli. Unendo tali punti si ottiene la sezione cercata.

Si disegnano le viste del cono in proiezione ortogonale e le tracce del piano secante:



## SEZIONE DEL CONO: ELLISSE METODO DEI PIANI PARALLELI

## PROCEDIMENTI DI RITROVAMENTO DELLE SEZIONI CONICHE

Fig. 123 / Proiezione ortogonale di un cono retto, con la base appoggiata sul P.O., sezionato dal piano  $\alpha$ , perpendicolare al P.V. e obliquo agli altri piani.

Sezione risultante: ellisse.

SISTEMA DELLE SUCCESSIVE SEZIONI PARALLELE AL P.O.

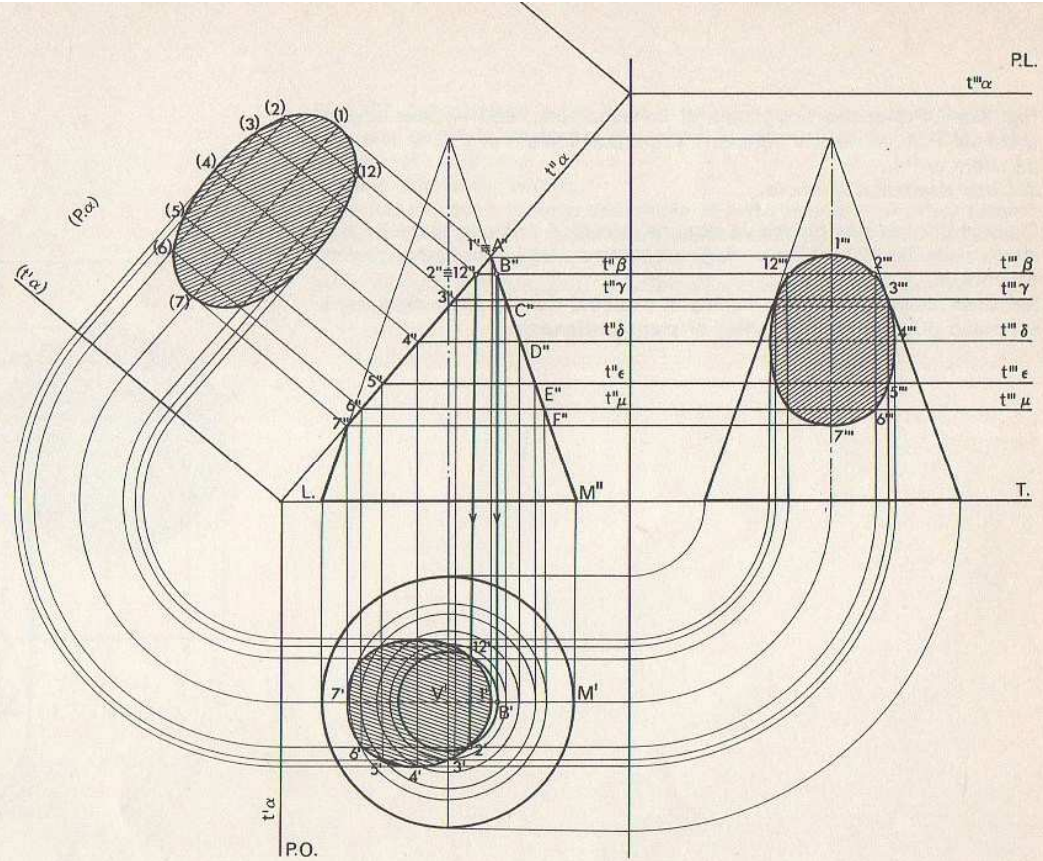
Non essendoci spigoli di riferimento si scelgono dei piani ( $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  ecc.) paralleli al P.O. e passanti per la parte sezionata del cono. Ognuno di tali piani, nell'intersecazione con la sezione prodotta dal piano  $\alpha$ , fissa due punti della conica. Più punti si determinano, più esatto sarà il risultato.

Il procedimento descrittivo è il seguente:

- 1) Si esegue la normale proiezione del cono e si dispone il piano  $\alpha$ , sezionante, nella posizione stabilita dal problema.
- 2) Si dispongono i piani  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ ,  $\nu$ , paralleli al P.O. tracciando la  $t''\beta$ , la  $t''\gamma$ , ecc.
- 3) Il punto  $A''$ , giacente su una generatrice parallela al P.V., si proietta sul P.O. in  $1'$ .
- 4) Il piano  $\beta$  interseca il cono nel punto  $B''$ , che proiettato in  $B'$  determina il raggio del cerchio di sezione prodotto dallo stesso piano  $\beta$ .
- 5) Con raggio  $V'B'$  si descrive la sezione orizzontale prodotta dal piano  $\beta$ .
- 6) Nella proiezione verticale, il piano  $\beta$  e il piano  $\alpha$  si intersecano formando una retta sulla quale giacciono anche i punti  $2'' \equiv 12''$  della superficie conica, secati da tali piani. Si proiettano questi punti sul P.O. e all'incontro con la circonferenza  $B'$  si fissano i punti  $2'$  e  $12'$ .

Procedendo in modo analogo si fissano tutti gli altri punti che, uniti fra loro, costruiscono l'ellisse.

Per trovare le dimensioni reali della sezione si segue il procedimento illustrato a pag. 76 e seguenti.



**Fig. 123**

# SEZIONE DEL CONO: IPERBOLE METODO DEI PIANI PARALLELI

Fig. 125 / Proiezione ortogonale di un cono retto, con la base appoggiata sul P.O., sezionato dal piano  $\alpha$ , perpendicolare al P.O. e al P.V. e parallelo al P.L.

*Sezione risultante: iperbole.*

Il procedimento per trovare la sezione conica è analogo a quello illustrato nella fig. 123, si basa cioè sul sistema delle successive sezioni orizzontali.

Nel caso della iperbole, la conica si proietta, con le dimensioni reali, sul piano di proiezione parallelo al piano sezionante.

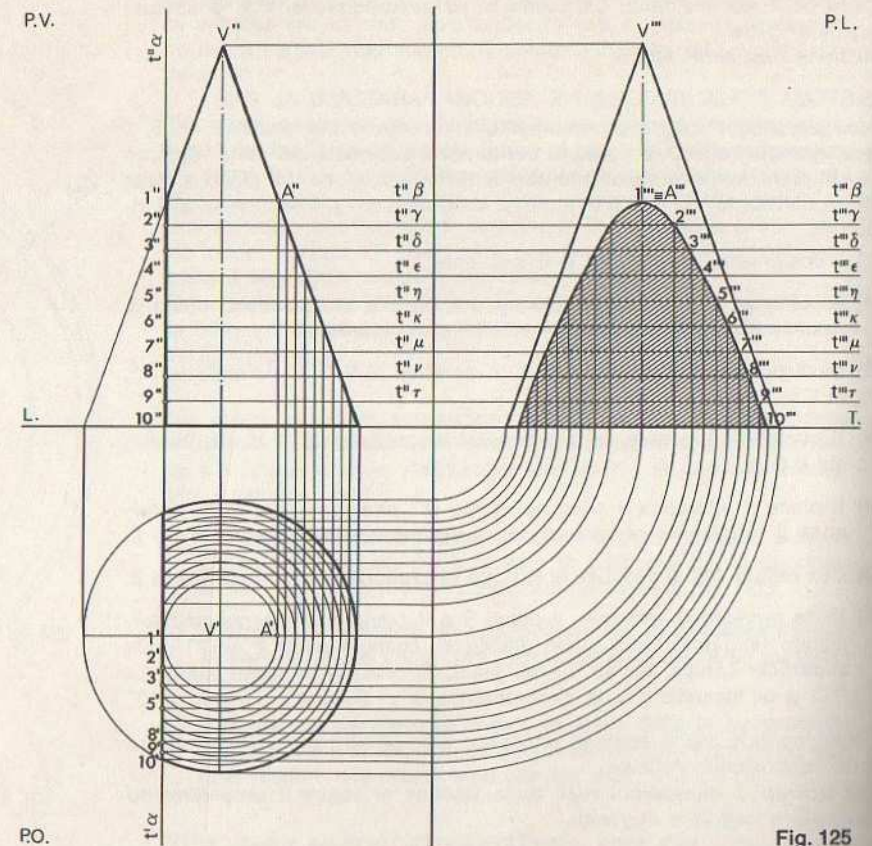


Fig. 125





## SEZIONE DEL CONO: PARABOLA METODO DEI PIANI PARALLELI

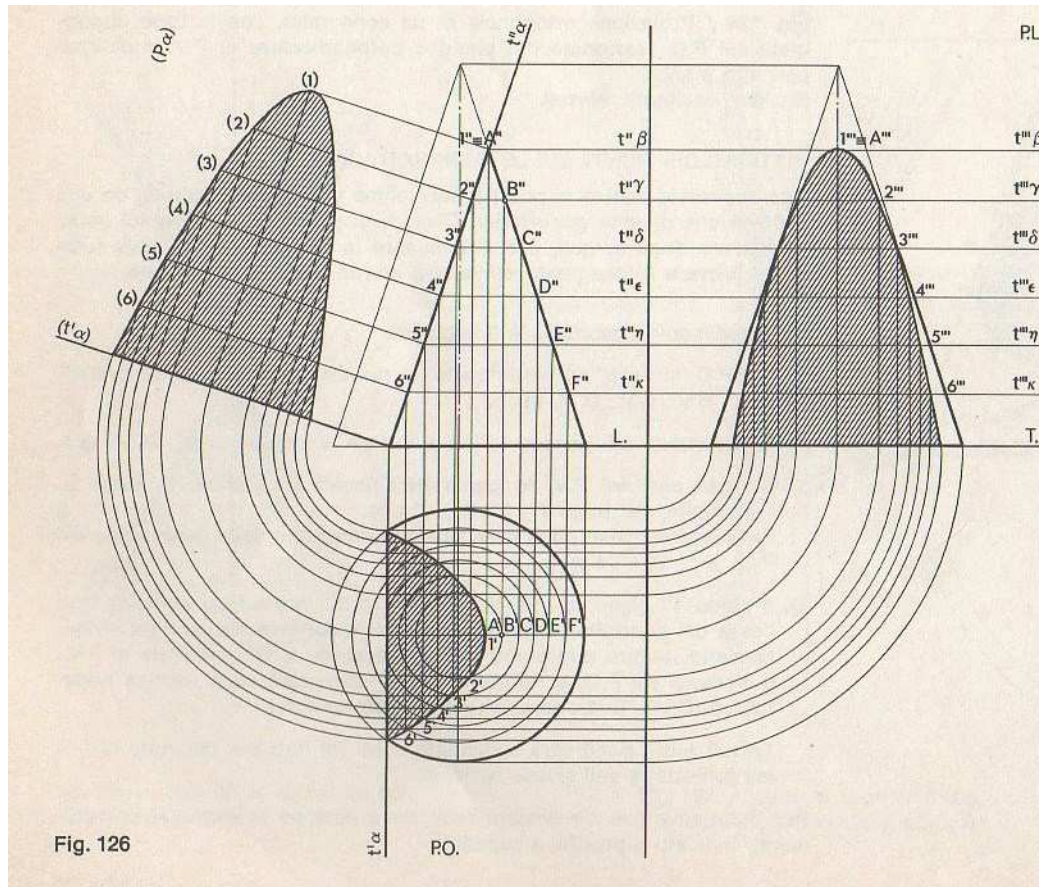
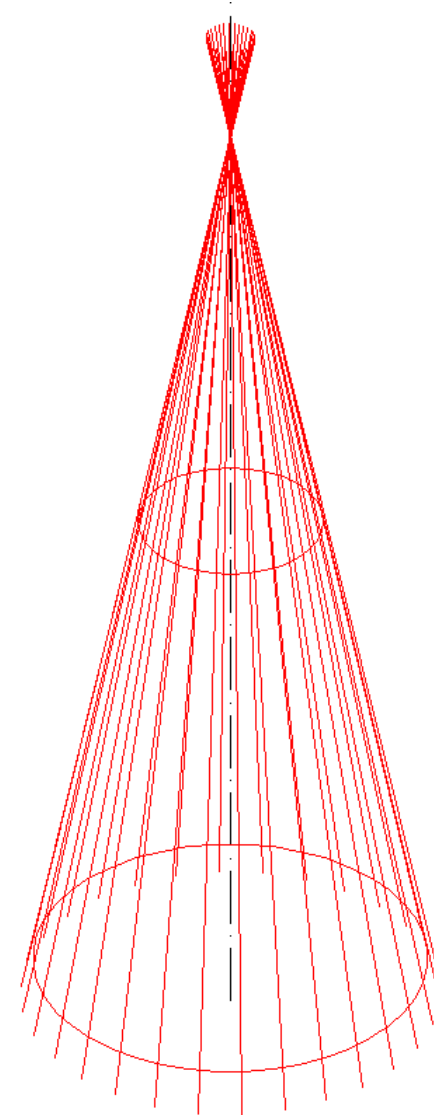
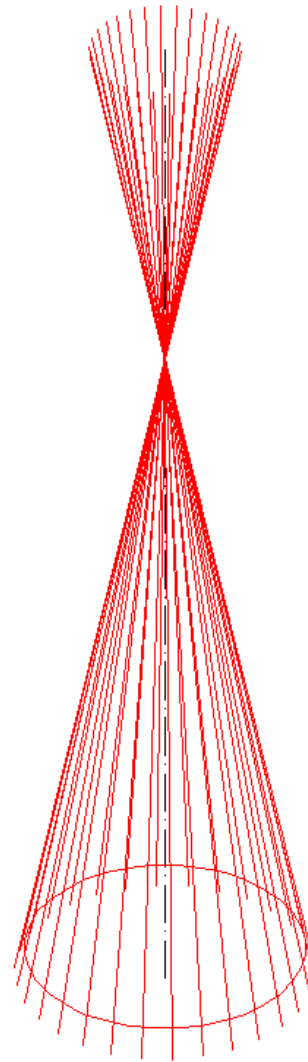
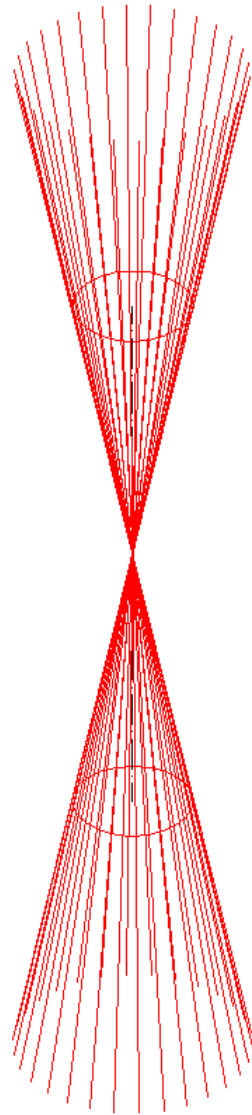


Fig. 126 / Proiezione ortogonale di un cono retto, con la base appoggiata sul P.O., sezionato dal piano  $\alpha$ , perpendicolare al P.V. e obliquo agli altri piani.

*Sezione risultante: parabola.*

Anche questo procedimento per trovare la conica, basato sul sistema delle successive sezioni orizzontali, è analogo a quello della fig. 123. In questo caso la sezione conica non viene mai proiettata nelle dimensioni reali; per trovarle è necessario eseguire il ribaltamento del piano sezionante, secondo il procedimento illustrato a pag. 76 e seguenti.

Quando il vertice diventa un punto improprio...

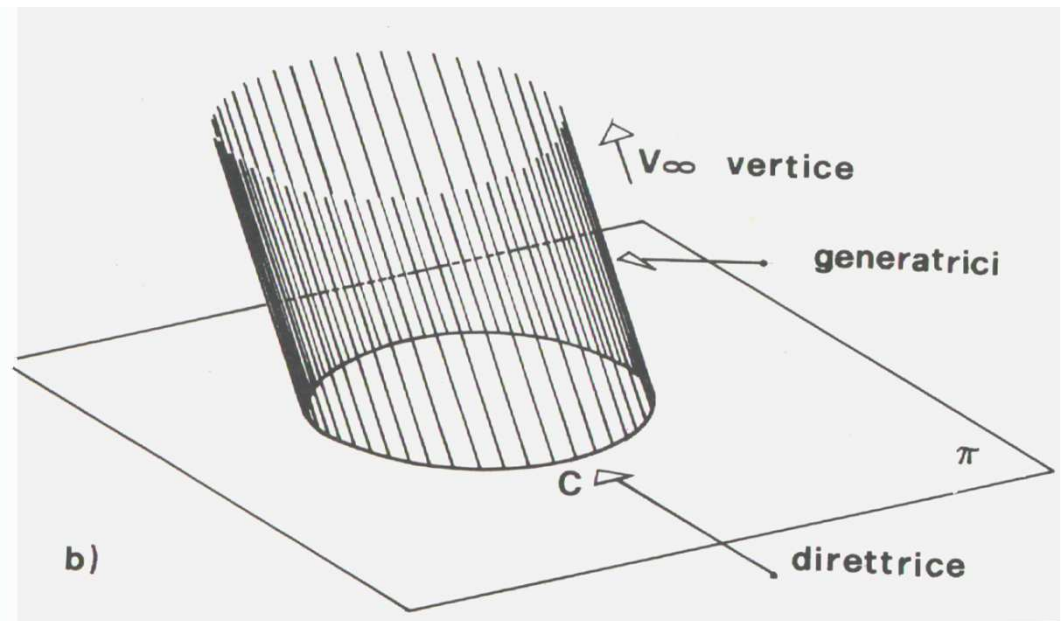


## P.O. di un Cilindro e sezioni piane

CILINDRO = superficie descritta da una retta (generatrice) che si muove con continuità appoggiandosi ad una linea piana (direttrice) e mantenendosi parallela ad una direzione fissa non parallela al piano della direttrice.

Superficie di rotazione ottenuta dalla rivoluzione di una retta (generatrice) attorno ad un asse.

Può essere considerato un caso particolare del cono: un cono che ha per vertice una direzione.



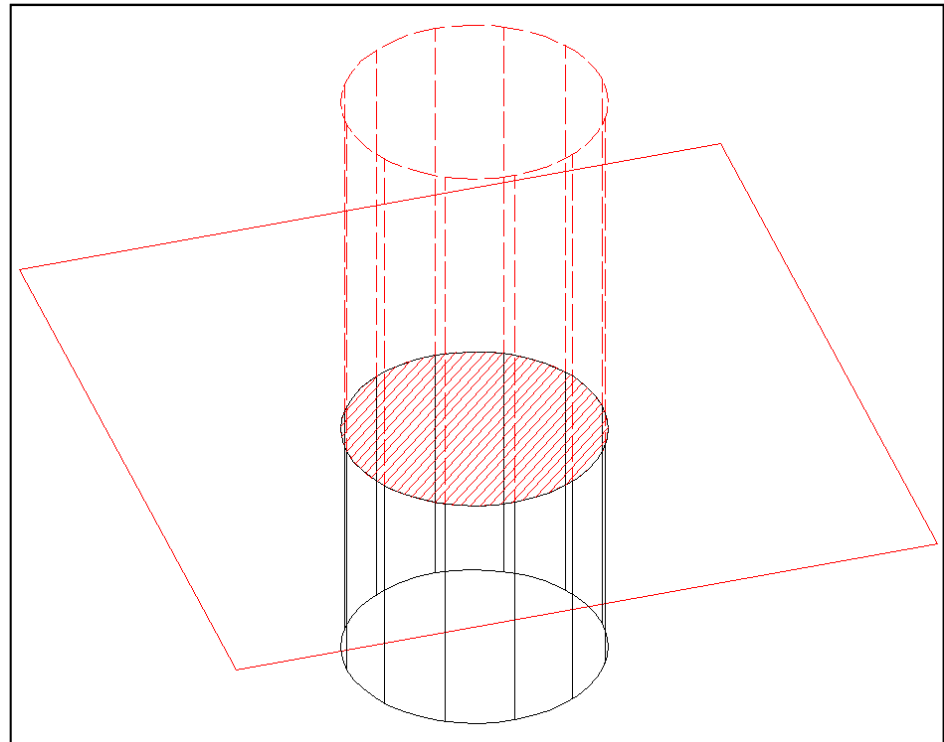


Se la direttrice è una circonferenza il cilindro si dirà circolare, se è un'ellisse sarà ellittico e così via...

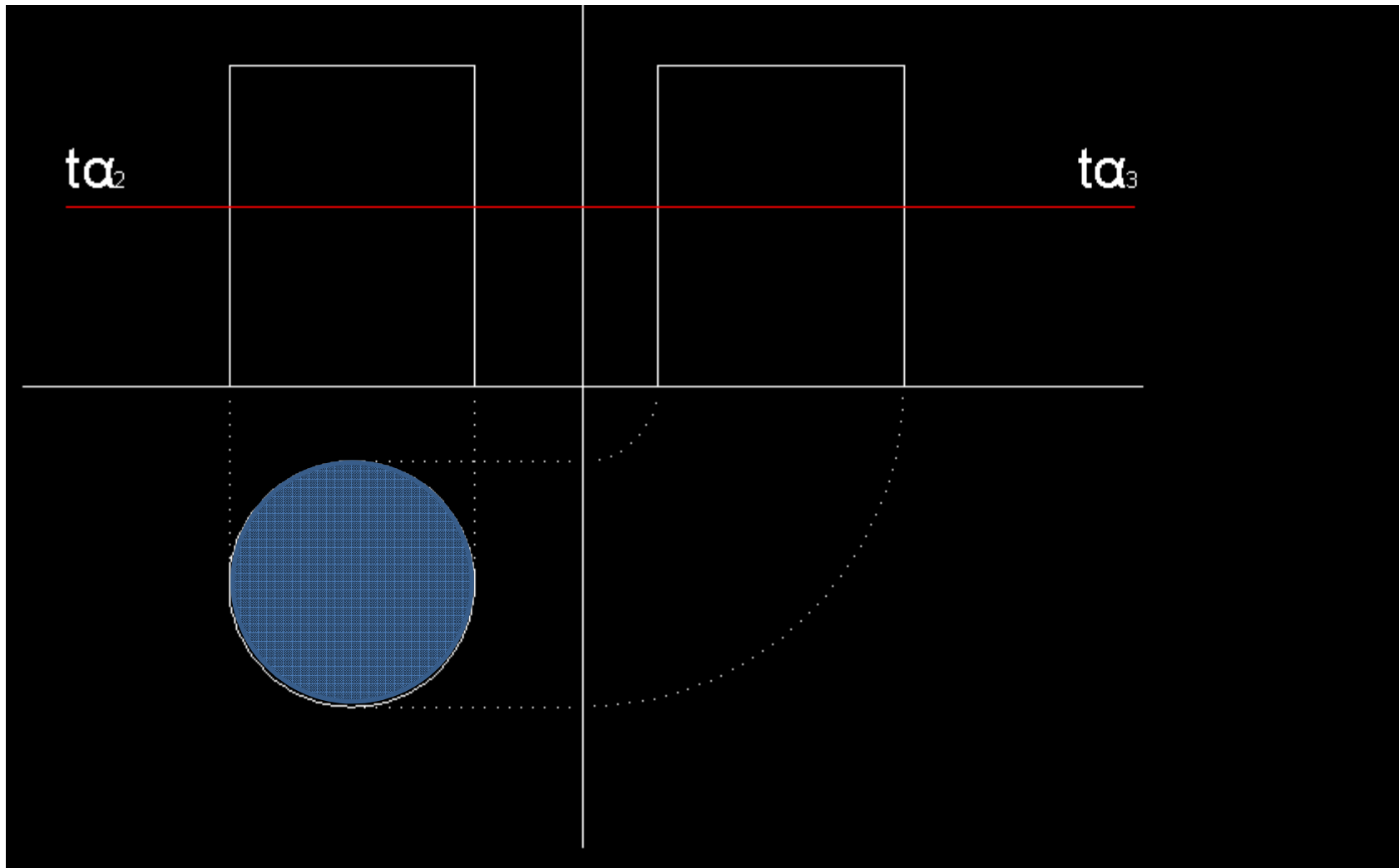
Se l'asse è ortogonale al piano della curva direttrice il cilindro si dice retto, in caso contrario obliquo

Durante il movimento della generatrice tutti i punti descrivono linee congruenti alla direttrice e che appartengono a piani paralleli al piano che contiene la direttrice medesima.

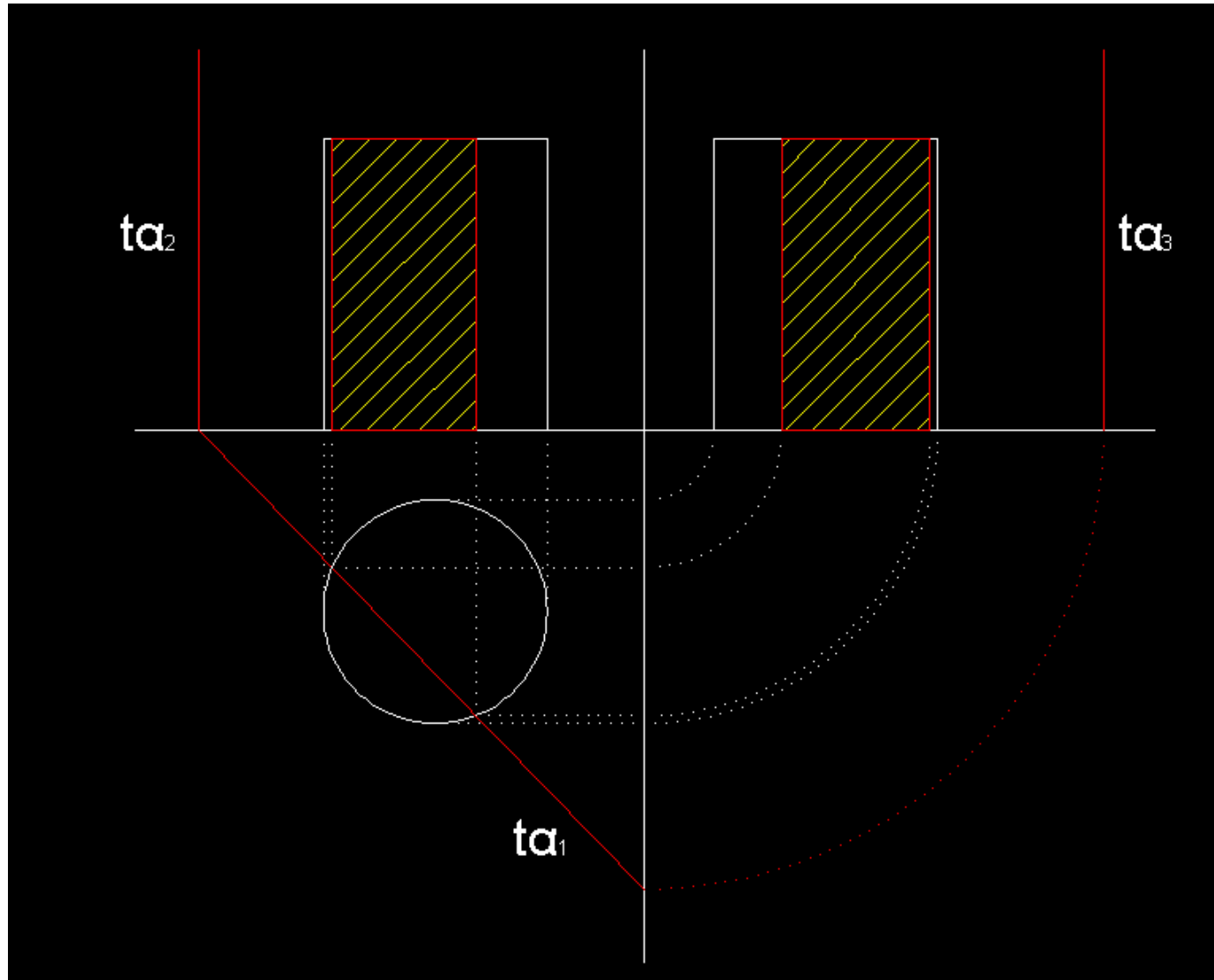
Se si seziona un cilindro circolare con un piano parallelo alla base, si ottiene una circonferenza



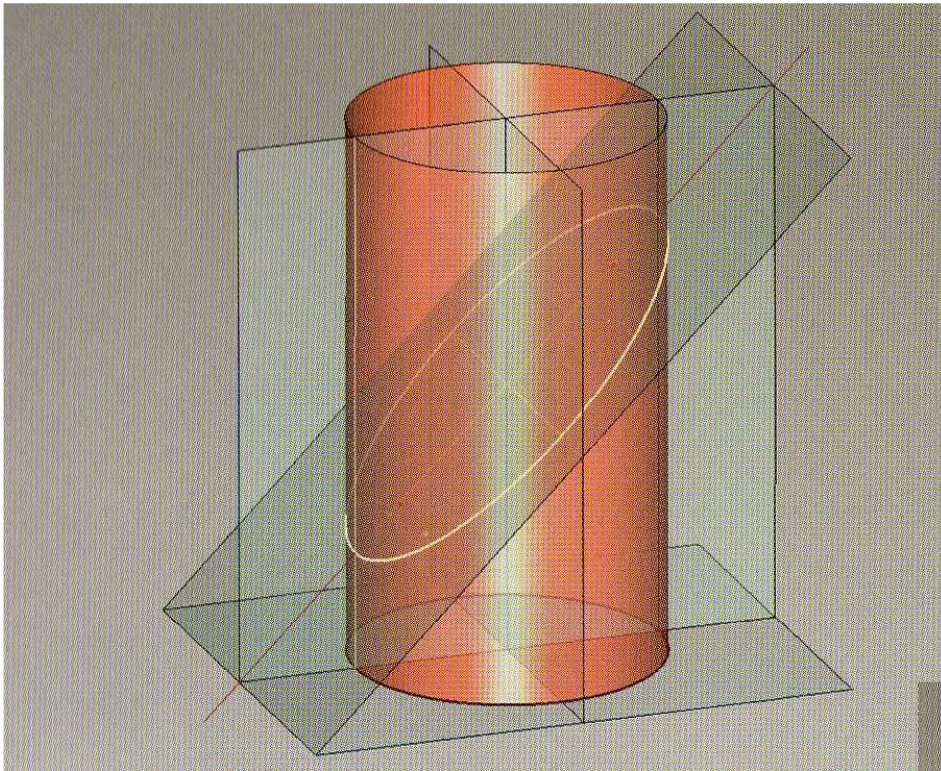
- Se il piano di sezione  $\alpha$  è **PERPENDICOLARE** all'asse di rotazione la sezione è una **CIRCONFERENZA**



Se il piano di sezione  $\alpha$  è **PARALLELO** all'asse di rotazione o passante per questo la sezione è rappresentata da due rette parallele tra loro

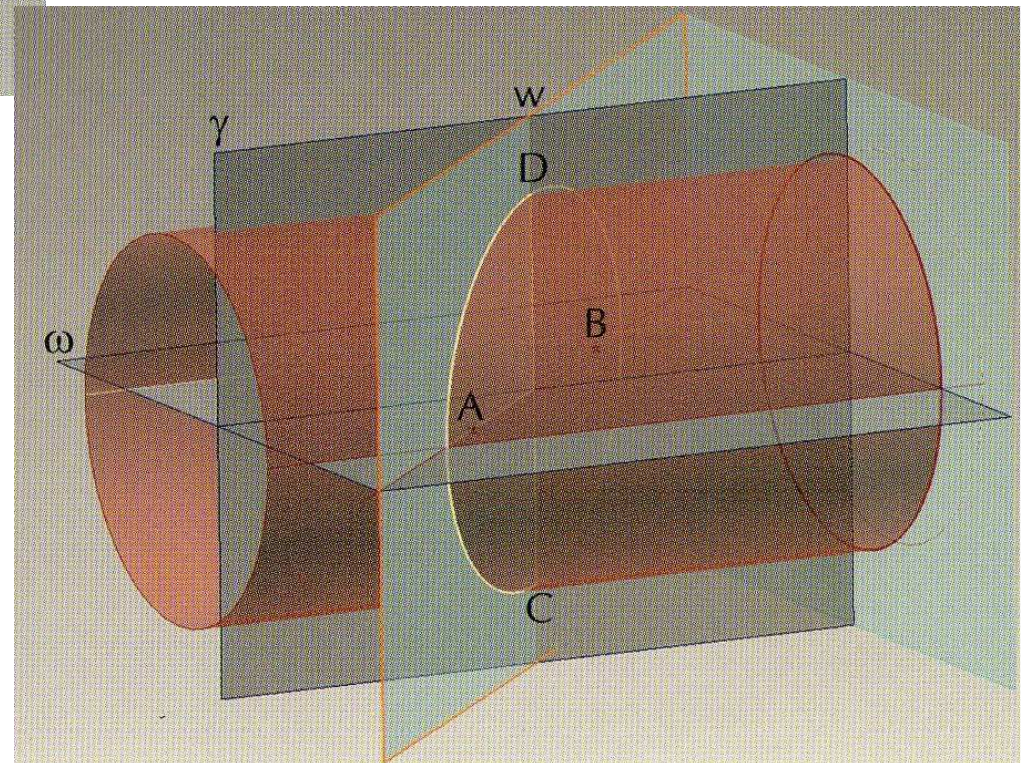






## Sezione con un piano inclinato

proiettante in seconda genericamente  
inclinato rispetto a  $\pi_1$





# SEZIONE DEL CILINDRO RETTO: ELLISSE METODO DELLE GENERATRICI

SEZIONI DEL CILINDRO

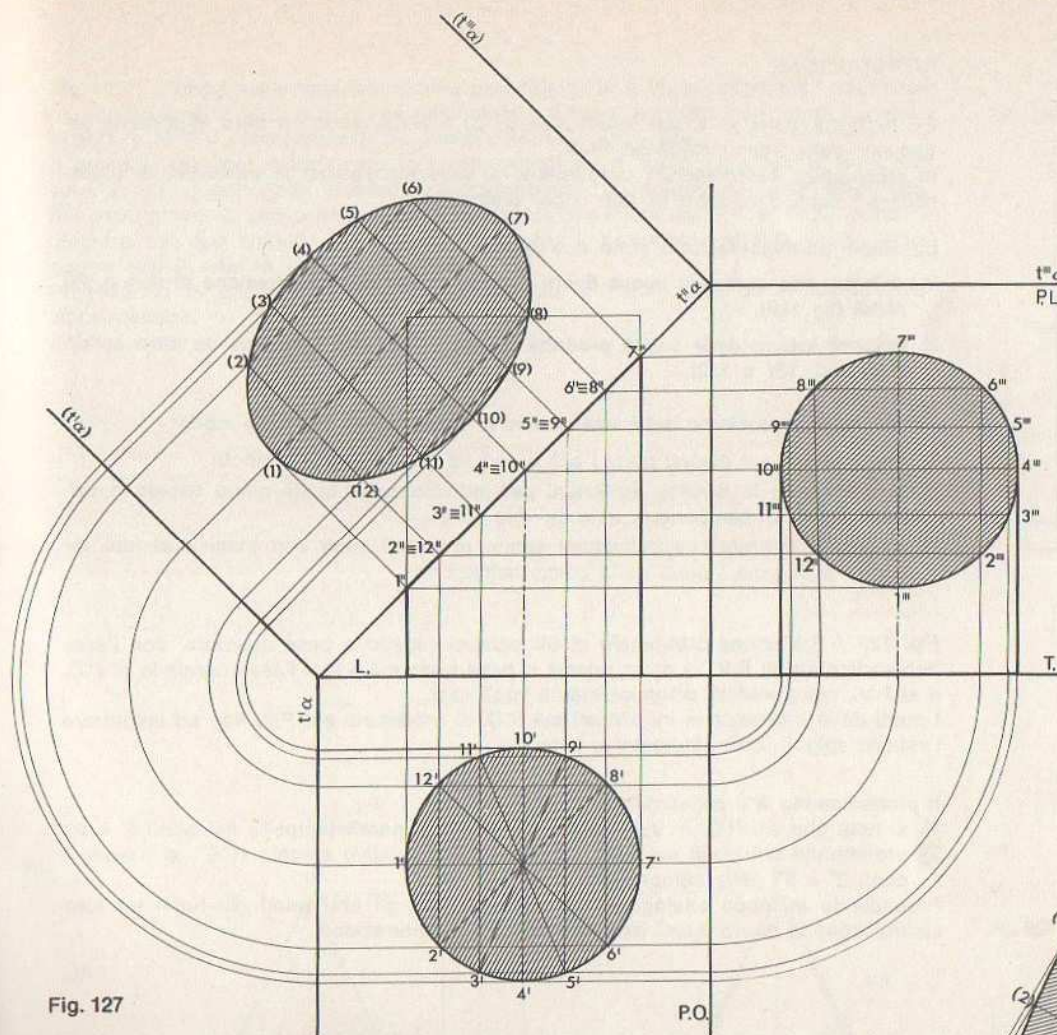
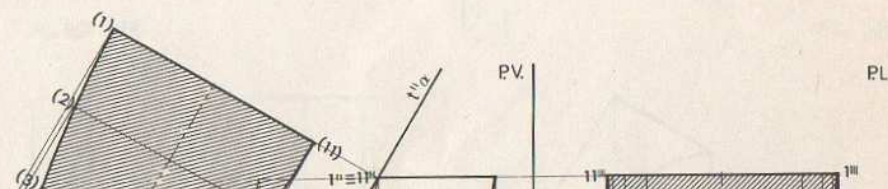


Fig. 127

Fig. 127 / Proiezione ortogonale di un cilindro retto, con la base appoggiata sul P.O., sezionato dal piano  $\alpha$  perpendicolare al P.V. e inclinato agli altri piani.

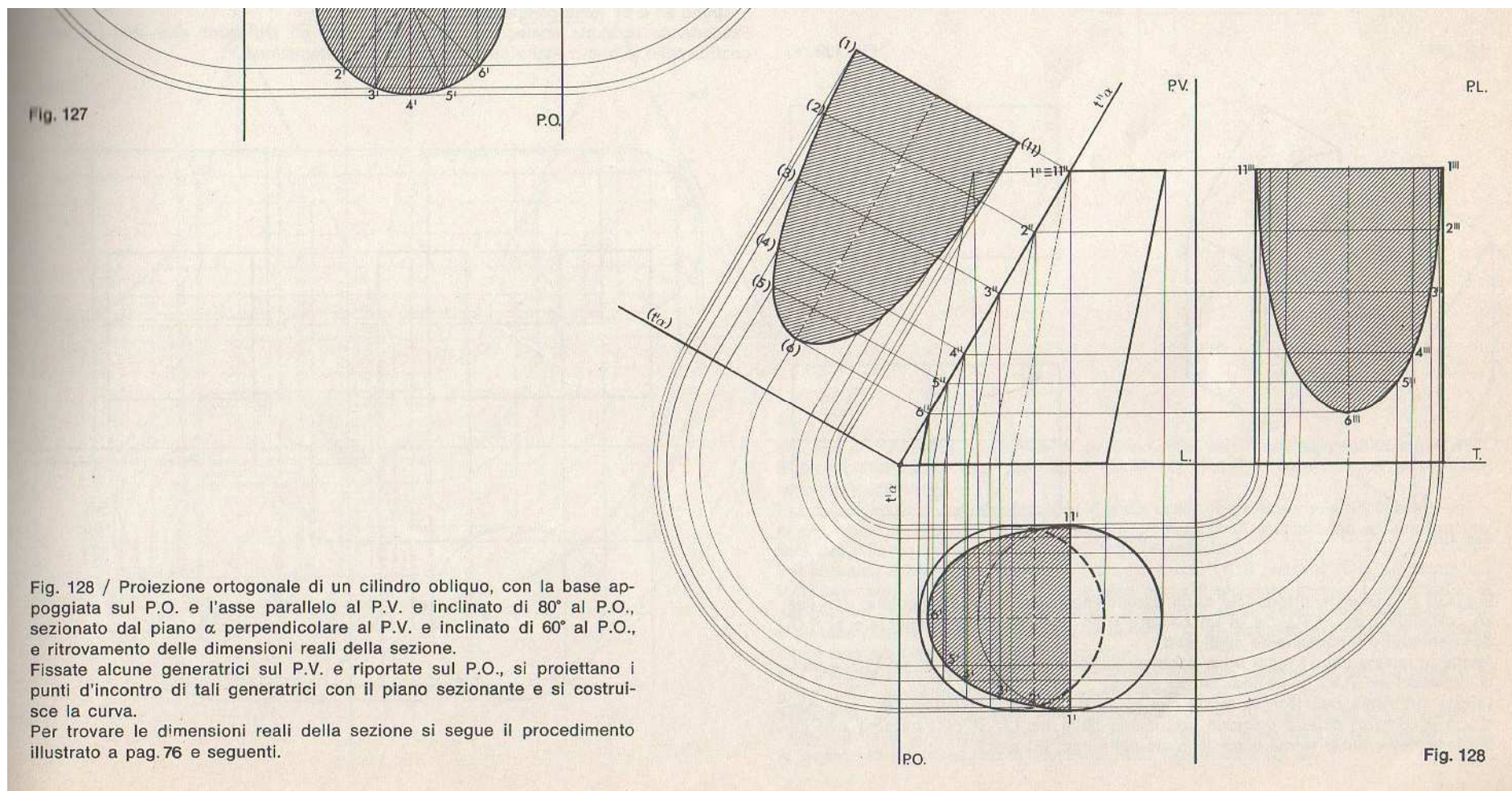
*Sezione risultante: ellisse.*

La soluzione del problema descrittivo si trova seguendo i procedimenti illustrati nelle pagine precedenti. Questo caso, però, sottolinea l'analogia esistente fra le sezioni coniche e **questa** sezione del cilindro che risulta *ellittica*. Per maggiori chiarimenti si veda l'ultimo paragrafo della pag.80.





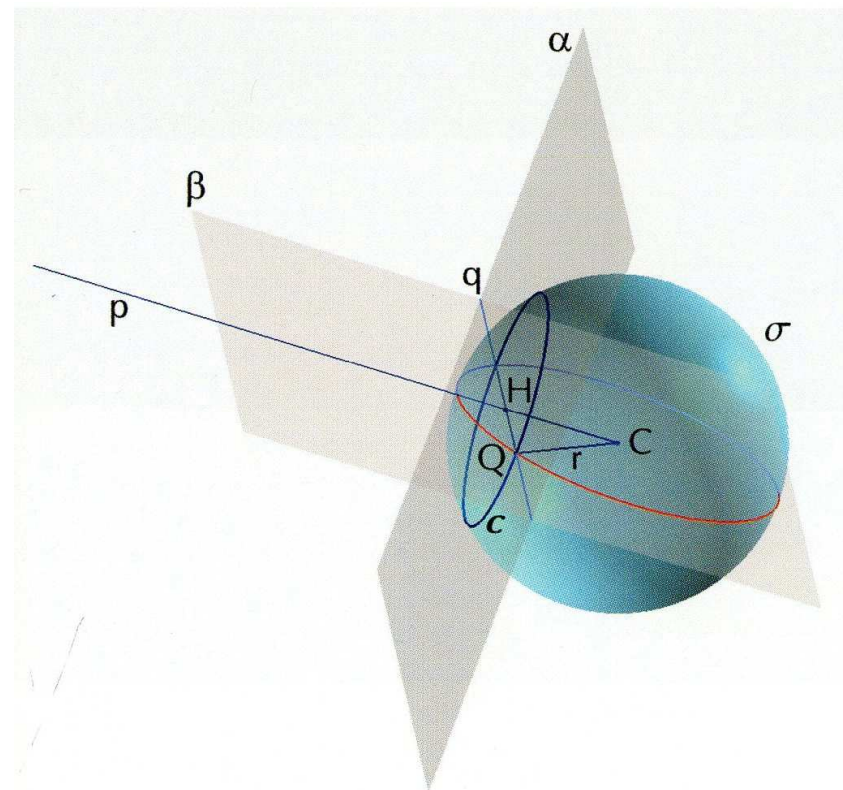
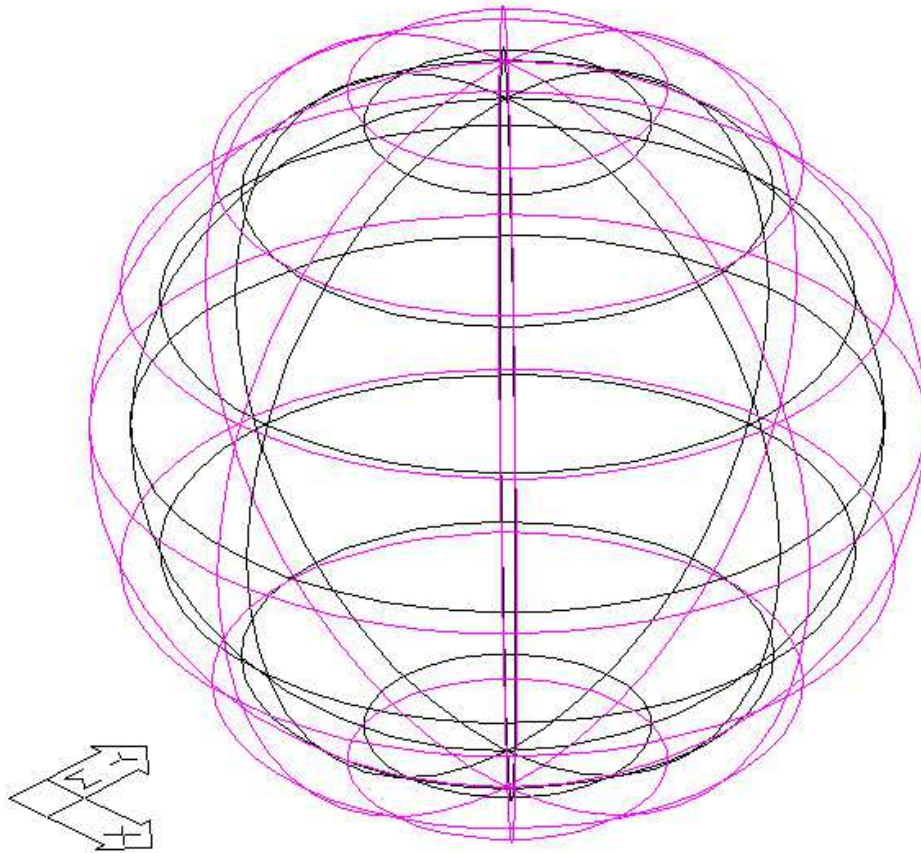
# SEZIONE DEL CILINDRO OBLIQUO: ELLISSE METODO DELLE GENERATRICI



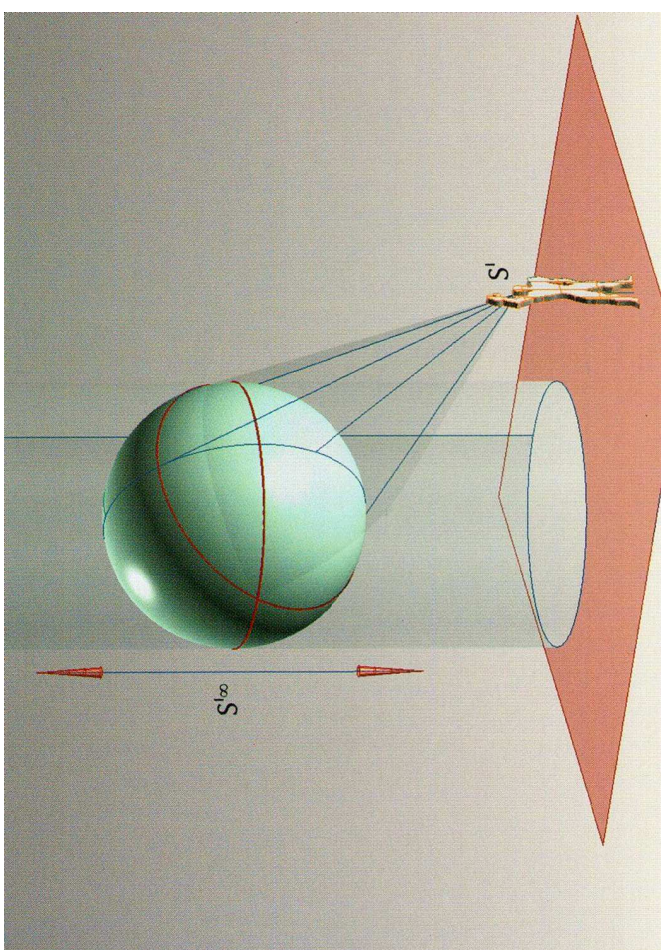
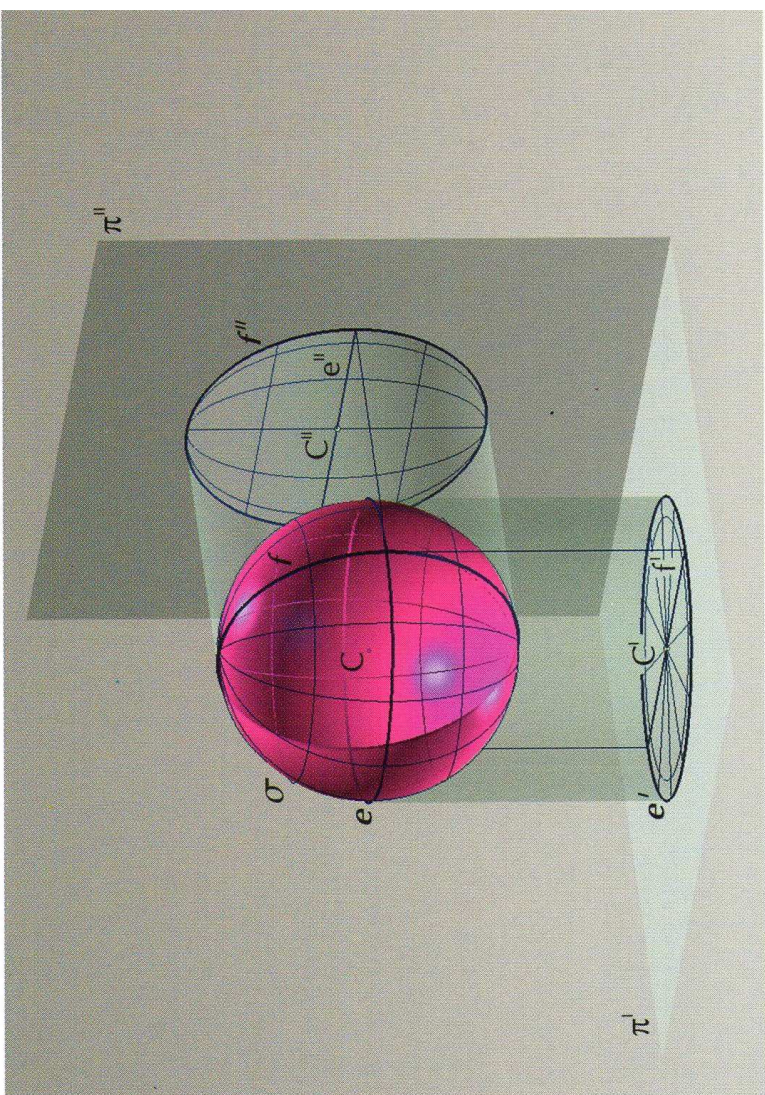


# Proiezioni Ortogonali di una SFERA e relative sezioni piane

la sfera è il luogo geometrico dei punti equidistanti dal centro

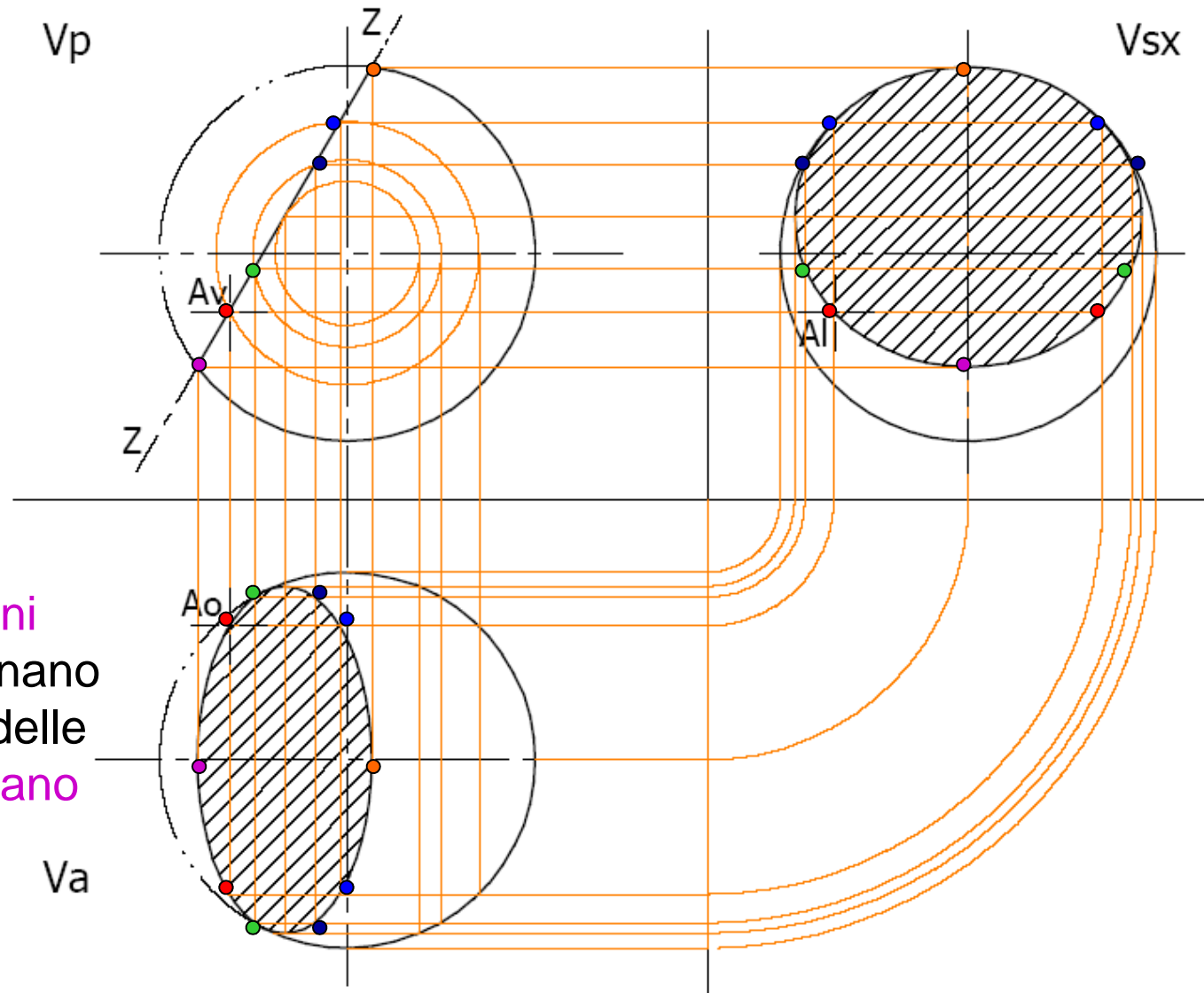






## Sezione di una sfera

La curva risultante dall'intersezione di un piano con una sfera è una **circonferenza**. Se il piano di proiezione non è parallelo al piano di sezione, la curva risultante sarà un'**ellisse**.



Si considerano le  
intersezioni tra i piani  
frontali che determinano  
nella vista frontale delle  
circonferenze e il piano  
sezione